SGA 30/08.

Deformaciones: Referencias: Libro Hartshorne "Deformation Theory".

Papers $\begin{cases} \text{Schelessinger 70's} \\ \text{Burns - Wahl 72'} \\ \text{Palamodov '74} \end{cases}$

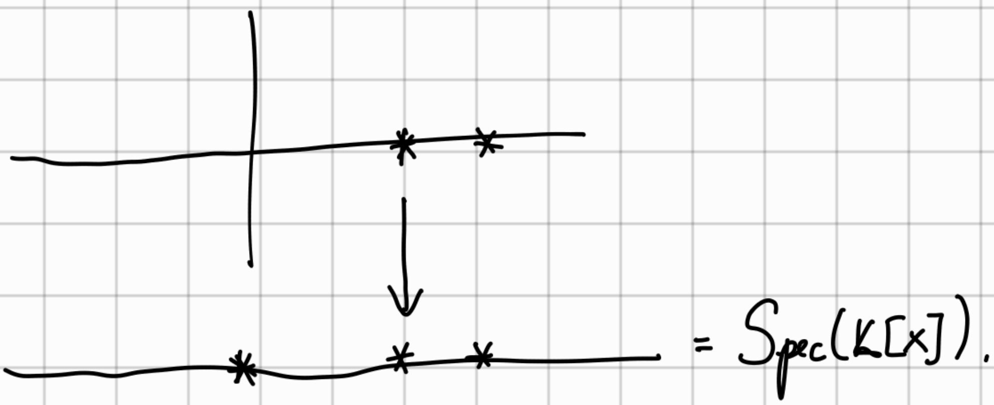
$\mathbb{Q}$ - Gorenstein Deformations $\begin{cases} \text{P. Hacking (thesis)} \\ \text{+ Par de papers.} \end{cases}$

Def: Una deformación de un esquema X sobre un esquema Y es un morfismo plano $X \to Y$.

Localmente hablando: Dado A anillo conmutativo y M - A módulo, se dice que M es plano si $0 \to N \to P \Rightarrow 0 \to N \otimes M \to N \otimes P$.
exacto.

Ej: $A = k[x] \longrightarrow k[x,y]/(xy) = M$. ($M$ se considera como A-módulo).

y $(x) \otimes M \to A \otimes M$ no es inyectivo.



Ej: 2 Blow-up en un punto no es plano (Morfismos biracionales no son flat).

Def (ej): $f: X \to Y$ morfismo de esquemas se dice plano en $x \in X$, si $\mathcal{O}_{X,x}$ es plano como $\mathcal{O}_{Y,y}$-módulo donde $f(x) = y$. Es <u>plano</u> si pasa para todo $x \in X$.

- Deformaciones preservan la dimensión de las fibras
- Para morfismo proyectivos, flatness $\Longleftrightarrow P_H(f^{-1}(y)) = P_H(f^{-1}(y_0)) \ \forall y \in Y$

$\Rightarrow$ género aritmético de las fibras es cte.

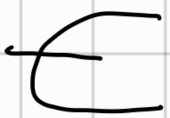
Ej: 3 Cualquier fibración de $X \xrightarrow{f} C$ = Curva proyectiva suave,

X = superficie proyectiva suave

$\Rightarrow f$ es una deformación.

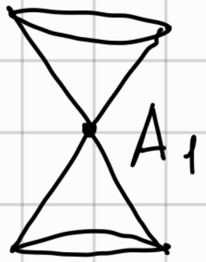
f irred en $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_\ell]$

$$\begin{tikzcd} X = \{f = 0\} \arrow[d] & \subseteq & \mathcal{X} = \{f = t\} \subseteq \mathbb{C}^\ell \times \mathbb{C}_t \arrow[d, "\text{proyectar}"] \\ 0 & \in & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$



Este es un primer ejemplo de una suavización

Ej 4: $X = \{x^2+y^2+z^2=0\} \subseteq \{x^2+y^2+z^2=t\}$



$$\begin{tikzcd} \{x^2+y^2+z^2=t\} \arrow[d] \\ t_1 \in \mathbb{C}. \end{tikzcd}$$

* Esp versales de deformación de sing ADE.

$\overline{X}$ = Variedad compleja algebraica:

Una deformación infinitesimal de $\overline{X}$ es:

$$D\left(\begin{array}{c}\mathbb{C}\text{-álgebra} \\ \text{artiniano}\end{array}\right) = \left\{ \begin{tikzcd} \overline{X} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \overline{X}' \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(\mathbb{C}) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(A) \end{tikzcd} \right\} \Big/ \text{iso}$$

$A = \mathbb{C}$-álgebra artiniana, $\overline{X}' \to \mathrm{Spec}(A)$ es plano

y la fibra sobre $m \subseteq A$ es $\overline{X}$.

Imaginar:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[d] & X \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(S) & 0 \arrow[l, phantom, "\ni"] \end{tikzcd}$$

S con dimensión de Krull >0.

En particular $D\left(\mathbb{C}[t]/(t^2)\right) = T^1_X$ se llama deformación de primer orden y quiere ser el espacio tangente a la supuesta base "Deformación universal".

Se puede demostrar $\left(\begin{matrix}\text{M. Olsson}\\ 2007\end{matrix}\right)$ que Π^1_X tiene estructura de $\mathbb{C}$-esp vectorial. Por otro lado:

1) $X = (x \in \overline{X}) \Rightarrow \Pi^1_X = \mathrm{Ext}^1(\Omega^1_X, \mathcal{O}_X)$.

2) X proyectivo y no singular, entonces $\Pi^1_X = H^1(X, T_X)$

$$T_X = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_X, \mathcal{O}_X)$$

$\longrightarrow$ localmente libre rango $\dim X$ también.

Ej: 1) $X =$ curva no singular proyectiva $=$

$\}$ género g.

$$\Omega^1_X = K_X$$

$$T_X = (\Omega^1_X)^\vee = -K_X.$$

Por R-R: $g \geq 2$ $\deg(K_X) = 2g-2$.

$$h^0(-K_X) - h^1(-K_X) = \deg(-K_X) + 1 - g$$

$$h^0(-K_X) = 0 \Rightarrow -h^1(-K_X) = 2-2g+1-g = 3-3g$$

$$\Rightarrow h^1(-K_X) = 3g-3 \ (\dim M_g).$$

Criterio de Schlessinger:

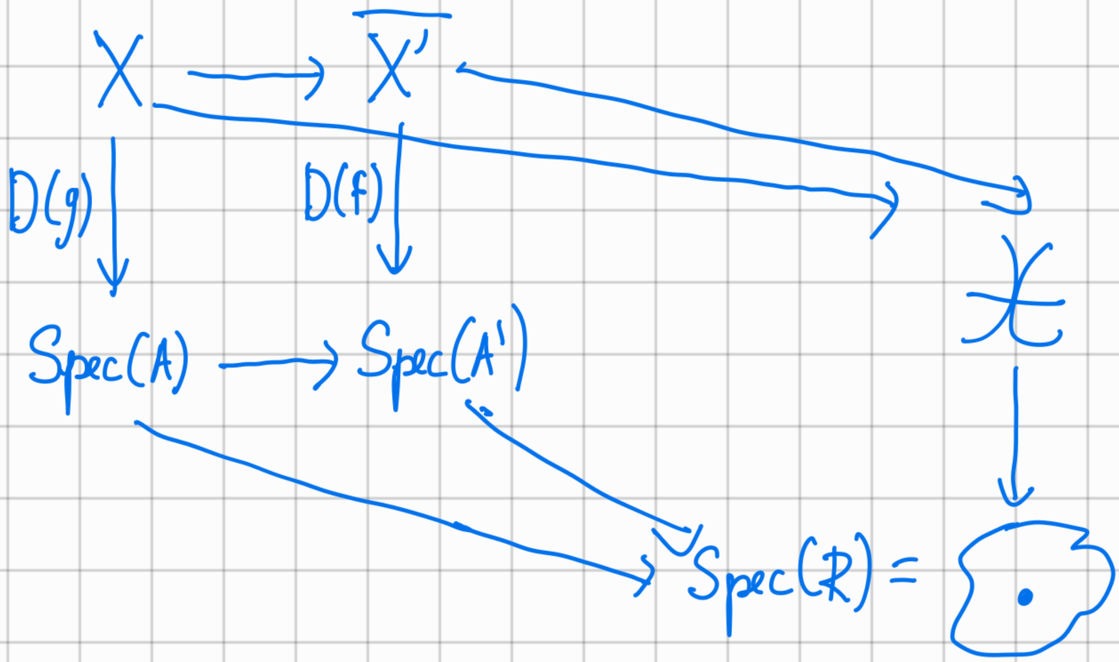
Si T^1_X es finito dimensional, entonces el functor D es versal: Existe una $\mathbb{C}$-álgebra local completa R y morfismo

$$\varphi_R : h_R = \mathrm{Hom}(R,-) \longrightarrow D$$

Tal que:

1) $\varphi\left(\mathbb{C}[t]/(t^2)\right)$ es biyección

2) φ es suave, dada $A' \twoheadrightarrow A$.



Y así todas las deformaciones de ese Spec (R).

Kuranishi:

1) Dado X = Compacto complejo suave $\Rightarrow \exists\, \mathrm{Def}(X)$ variedad analítica

y
$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[d] & X \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\ \mathrm{Def}(X) & \ni 0 \end{tikzcd}$$
la cual es versal.

El $\Pi^1_X = H^1(T_X) \xrightarrow[\text{analítico}]{} \Pi^2_X = H^2(T_X)$

tal que los ceros describen a $\mathrm{Def}(X)$. Si $\Pi^0_X = H^0(T_X) = 0$.

" Aut infinitesimales

$\Rightarrow$ el espacio versal de deformaciones es universal.

Ej: (-1) curvas

$\pi : \widetilde{X} \to X$ = superficie no singular

$\cup$

$E \longmapsto x$

" (-1)-curva.

$$0 \to \pi^*(\Omega^1_X) \to \Omega^1_{\widetilde{X}} \to \Omega^1_E \to 0$$ tensorizando por

Ω^2_X y sacando la sucesión exacta en cohomología.

$$\Rightarrow 0 \to H^0(T_{\widetilde{X}}) \to H^0(T_X) \to H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$$

$$\to H^1(T_{\widetilde{X}}) \to H^1(T_X) \to H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) = \underbrace{H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-3))}_{=0}$$

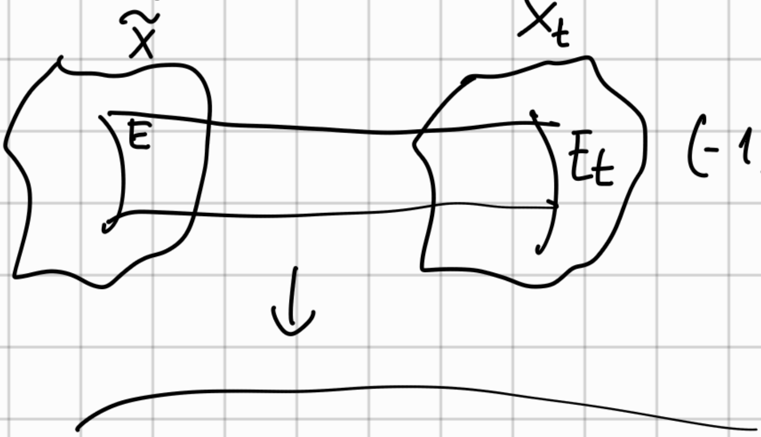
$$H^2(T_{\tilde{X}}) \to H^2(T_X) \to 0.$$

* En tipo general: $H^0(T_X) = 0$.

$$\Rightarrow 0 \to \mathbb{C}^2 \to H^1(T_{\tilde{X}}) \to H^1(T_X) \to 0$$

Por otro lado, En una deg de X el se mueve E_t
$$\begin{cases} \deg(\tilde{X}, C) = H^0(\mathcal{N}_C|_{\tilde{X}}) = H^0(\mathcal{O}(-1)) = 0 \\ \operatorname{obst}(\tilde{X}, C) = H^1(\mathcal{N}_C|_{\tilde{X}}) = H^1(\mathcal{O}(-1)) = 0. \end{cases}$$

(-m curvas)



(-1) curva

Rígido: $H^1(T_X) = 0$

X = no sing. proyectivo $\Rightarrow$ X es rígida.

dim 1 : $C \cong \mathbb{P}^1$.

dim 2 : · Del Pezzo
· Inoue
· Tipo general minimal, K amplio [B-W]

$$\frac{c_1^2}{c_2} \in \left[\frac{1}{5}, 3\right], \text{ Rígido } \in \left[\frac{5}{7}, 3\right]$$

Sabemos: Algunas familias y algunos puntos límites

Todas rígidas) $\hookrightarrow \mathbb{B}^2/\Gamma = S$

No se sabe: <u>Densidad</u>.

Trilogías de algunas superficies:

* $\mathbb{P}^2$: Mediante la sucesión exacta de Euler tenemos que:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)^{\oplus 3} \to T_{\mathbb{P}^2} \to 0.$$

Tomando sucesión exacta en cohomología obtenemos:

$$0 \to H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) \to H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))^{\oplus 3} \to H^0(T_{\mathbb{P}^2}) \to$$

$$\to H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) \to H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))^{\oplus 3} \to H^1(T_{\mathbb{P}^2}) \to$$

$$\to H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) \to H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))^{\oplus 3} \to H^2(T_{\mathbb{P}^2}) \to 0.$$

* Ahora, por la cohomología de los haces torcidos:

$$h^i(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(n)) = \begin{cases} h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(-n-3)) & \text{si } i=2 \\ 0 & \text{si } i=1 \\ h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(n)) & \text{si } i=0. \end{cases}$$

Así directamente notamos que $H^i(T_{\mathbb{P}^2}) = 0$ para $i=1,2$, y
$0 \to \mathbb{C} \to \mathbb{C}^9 \to H^0(T_{\mathbb{P}^2}) \to 0$, lo cual implica
$H^0(T_{\mathbb{P}^2}) \cong \mathbb{C}^8$.

Así $\mathbb{P}^2$ es una superficie rígida y sin obstrucción.

* $\mathbb{F}_n$: Viendo $\mathbb{F}_n = (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) / (\mathbb{C}^2)^*$

con $(l_0, l_1, t_0, t_1) \sim (\lambda l_0, \lambda l_1, \lambda^q \mu t_0, \mu t_1)$, $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{C}^2)^*$

y estructura reglada $\pi : \mathbb{F}_n \to \mathbb{P}^1$, $(l_0, l_1, t_0, t_1) \mapsto [l_0 : l_1]$, obtenemos

la cubierta $\mathbb{F}_n = \mathcal{U} \cup \mathcal{U}'$ con $\mathcal{U} = \{l_0 \neq 0\} \cong \mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1$

$\mathcal{U}' = \{l_1 \neq 0\} \cong \mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1$

* El $\mathcal{U}$ y el $\mathcal{U}'$ los podemos descomponer en abiertos afines dados por $\mathcal{U}_{ij} = \{l_i t_j \neq 0\}$. En coordenadas locales:

$\mathcal{U}_{0,0} : z = \dfrac{l_1}{l_0}, \; s = \dfrac{t_1}{t_0} l_0^n$ | $\mathcal{U}_{0,1} : z = \dfrac{l_1}{l_0}, \; s' = \dfrac{t_0}{t_1 l_0^n}$

$\mathcal{U}_{1,0} : w = \dfrac{l_0}{l_1}, \; y' = \dfrac{t_1}{t_0} l_1^n$ | $\mathcal{U}_{1,1} : w = \dfrac{l_0}{l_1}, \; y = \dfrac{t_0}{t_1 l_1^n}$

* Calculamos $H^0(T_{\mathbb{F}_n})$.

Sobre $\mathcal{U}_{00}$ no es difícil ver que en nuestras coordenadas; $\Theta \in H^0(T_{\mathbb{F}_n})$ cumple que:

$$\Theta|_{\mathcal{U}_{00}} = g(z)\frac{\partial}{\partial z} + (a(z)+b(z)s+c(z)s^2)\frac{\partial}{\partial s}$$

con $g, a, b, c \in k[z]$.

Similarmente en $\mathcal{U}_{11}$, $\Theta|_{\mathcal{U}_{11}} = \rho(w)\frac{\partial}{\partial w} + (\alpha(w)+\beta(w)y+\gamma(w)y^2)\frac{\partial}{\partial y}$

Entonces en la intersección $\mathcal{U}_{00} \cap \mathcal{U}_{11}$: Se tienen las restricciones heredadas de los cambios de coordenadas $z = \frac{1}{w}$, $y = z^n s$.

$$\begin{cases} g(z) = -\rho(z^{-1})z^2 \\ a(z) = \alpha(z^{-1})z^{-n} \\ b(z) = \beta(z^{-1}) + \rho(z^{-1})nz \\ c(z) = \gamma(z^{-1})z^n \end{cases}$$

Aquí notamos que $\deg(g) \leq 2$. Si $n>0$ notamos que $a(z)=0$ porque pedimos que sea polinomio, no función racional.

$$b(z) = b - mz(g_1 + g_2 z)$$

$C(z)$ un polinomio con $\deg(C) \leq n$.

* De aquí deducimos que para completamente determinar $\Theta|_{U_\infty}$ se requieren de $n+5$ parámetros. Para el caso $n=0$ es fácil ver que son 6 porque $a(z), b(z), C(z)$ son todos constantes.

Entonces $$h^0(T_{\mathbb{F}_n}) = \begin{cases} n+5 & \text{si } n \geq 1 \\ 6 & \text{si } n=0. \end{cases}$$

* Se tiene que $H^2(T_{\mathbb{F}_n}) = H^0(\Omega^1_{\mathbb{F}_n} \otimes \omega_{\mathbb{F}_n}) = 0$

* Al ocupar la fórmula de Hirzenbuch-Riemann-Roch, vemos que

$$\chi(T_{\mathbb{F}_n}) = 2\chi(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}) + C_1^2(\mathbb{F}_n) - C_2(\mathbb{F}_n)$$

* $C_1^2(\mathbb{F}_n) = K^2_{\mathbb{F}_n} = (-2\Delta_n + (n-2)F)^2 = 8$

* $C_2(\mathbb{F}_n) = \chi_{top}(\mathbb{F}_n) = 4$, entonces

Si $n \geq 1$, $n+5 - h^1(T_{\mathbb{F}_n}) = 2+8-4 \Rightarrow$

$$h^1(T_{\mathbb{F}_n}) = n-1$$

Si $n=0$, vemos que $h^1(T_{\mathbb{F}_0}) = 0$.

Por lo tanto, $D_{\mathbb{F}_n}\left(\mathbb{C}[t]/(t^2)\right) \cong \mathbb{C}^{n-1}$ para $n \geq 2$

y las variedades $Bl_p(\mathbb{P}^2)$, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ son obviamente rígidas.