SGA 06/09

$$T\text{-Sing} = \begin{cases} D_n\text{-val} \\ \frac{1}{dn^2}(1, dna-1) \ , \ \mathrm{mcd}(d,a)=1 \end{cases}$$

* Cubierta canónica de la T-singularidad: Si A es la acción de $\mathbb{Z}/dn^2\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{C}^2$, tenemos que:

$n(dna-1) \equiv -n \pmod{dn^2}$

$A^n(x,y) = (\mu^n x, \mu^{-n} y)$

$u = x^{dn}, \ v = y^{dn}$

$w = xy \longrightarrow (w^{dn} = uv) \subseteq \mathbb{C}^3$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C}^2 \arrow[dl, "1:dn"'] \arrow[dr] & \\ \mathbb{C}^2/\langle A^n\rangle \arrow[rr] & & (w^{dn}=uv) \subseteq \mathbb{C}^3 \end{tikzcd}$$

$$(w^{dn}=uv) \subseteq \mathbb{C}^3 \Big/ \tfrac{1}{n}(1,-1,a) \cong \mathbb{C}^2/\langle A\rangle$$

Def: $(x \in \overline{X})$ sing l.c (sing cociente = l.t)

$\Rightarrow$ Una deformación $\mathbb{Q}$-Gorenstein es una deformación $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-equivariante del cubrimiento canónico $Z \to (x \in \overline{X})$ dado por el índice de la singularidad.

Ej: $\mathrm{Def}_{QG}(x \in \overline{X})$ tiene dim d.

Globalmente:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[d] & \mathcal{W} \arrow[d] \\ 0 \arrow[r, phantom, "\in"] & S \end{tikzcd}$$

deformación $\mathbb{Q}$-Gorenstein si localmente lo es $\forall$ sing en W.

Obs: Si $\mathcal{W}$ es normal, la fibra general tiene solo sing canónicas (ADE) y $K_{\mathcal{W}}$ es $\mathbb{Q}$-cartier., entonces

$$W \subseteq W^3$$
$$\downarrow$$
$$0 \in \mathbb{D}$$ = "germen de curva no singular" & $\mathbb{Q}$-Gorenstein

Teorema: [Hacking, Prokhorov] $\mathbb{P}^2 \rightsquigarrow$ normal (Manetti).

Una deformación versal de $\frac{1}{dn^2}(1, dna-1)$
$$\parallel$$
$\mathrm{Def}_{QG,Tsing}$.

$$\{xy = z^{dn} + t_{d-1} z^{(d-1)n} + \cdots + t_1 z^n + t_0\} \subset \frac{1}{n}(1,-1,a) \times \mathbb{C}^d.$$

y proyector. Más aún, las posibles sing de las fibras son:

$$A_{e_1-1}, \ldots, A_{e_s-1} \text{ ó } \frac{1}{e_1 n^2}(1, e_1 na-1), A_{e_2-1}, \ldots, A_{e_s-1}$$

donde $e_1 + \cdots + e_s = d$.

Trilogía: Sup proj con T-sing$|_{\mathbb{C}}$ $\quad T^0_{QG,W}$ = Automorfismos infinitesimales $= H^0(T_W)$

$T^1_{QG,W}$ = Espacio tangente a $\mathrm{Def}_{QG,W}$

$T^2_{QG,W}$ = obstrucciones para extender Q-G def infinitesimales.

Teo [Ifaka] Si K_W es big y nef $\Rightarrow Aut(W)$ es finito.

Luego: $H^0(T_W) = 0$.

¿Cómo calcular esos espacios vectoriales?

Sec espectral de Leray:

$$0 \to \underbrace{H^1(T_W)}_{\text{Def de } W\text{-equisingulares}} \to \mathbb{T}^1_{QG,W} \to \underbrace{H^0(\mathcal{T}^1_{QG,W})}_{\substack{\text{Deformaciones locales de las singularidades} \\ \cong \bigoplus \mathbb{C}^{d_i} \\ \text{de las T-sing en } W}} \to H^2(T_W) \to \mathbb{T}^2_{QG,W} \to 0$$

(3) Lee-Park: [LP07]

Estrategia: $H^2(T_W) = 0 + K_W$ big y nef

$$\Downarrow$$

$$H^0(T_W) = 0.$$

Entonces, $0 \to H^1(T_W) \to \mathbb{T}^1_{QG,W} \to \bigoplus \mathbb{C}^{d_i} \to 0$ y $Def_{QG,W}$ es no singular y existen deformaciones $\mathbb{Q}$-Gorenstein suaves

$$\begin{array}{ccc} W & \subseteq & \mathcal{W} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \in & \mathbb{D} \end{array} \Rightarrow K_{W_t} \text{ nef}$$

$K_W^2 = K_{W_t}^2$, p_g, q, $\chi(\mathcal{O}_W)$, $\chi_{top}(W)$ constantes

$\therefore$ $K_W^2 > 0$ y K_W nef $\Rightarrow$ W_t tipo general y minimal + sing.

Obs: $\pi_1(W_t)$ No necesariamente constante

[LP 07]: Existencia de superficie $K^2=2$, $p_g=0$, y $\pi_1=\{1\}$.

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{T}^1_{QG,W} = \sum d_i + h^1(T_W).$$

Por otro lado, R-R:

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}^1_{QG,W}) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}^2_{QG,W}) + 10\chi(\mathcal{O}_W) - 2K_W^2$$

$$\Rightarrow 10\chi(\mathcal{O}_W) - 2K_W^2 > 0$$

y así $0 < K_W^2 < 5\chi(\mathcal{O}_W)$

$p_g = q = 0 \Rightarrow K_W^2 = 1, 2, 3, 4.$

Barlow

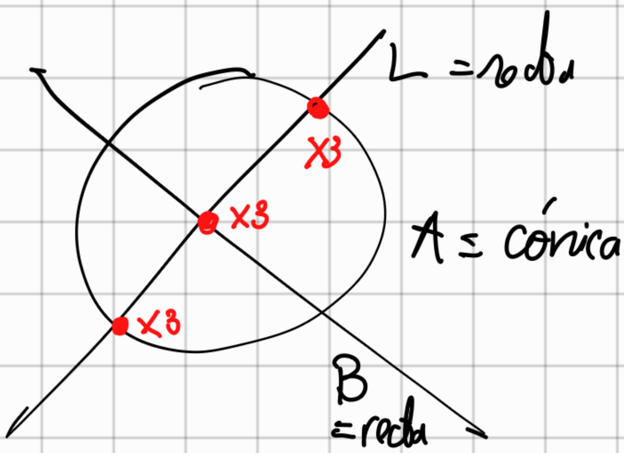
$$Bl_{9-K_W^2}(\mathbb{P}^2) \underset{\text{homeo.}}{\simeq} W_t.$$

Primer ejemplo de Lee-Park:

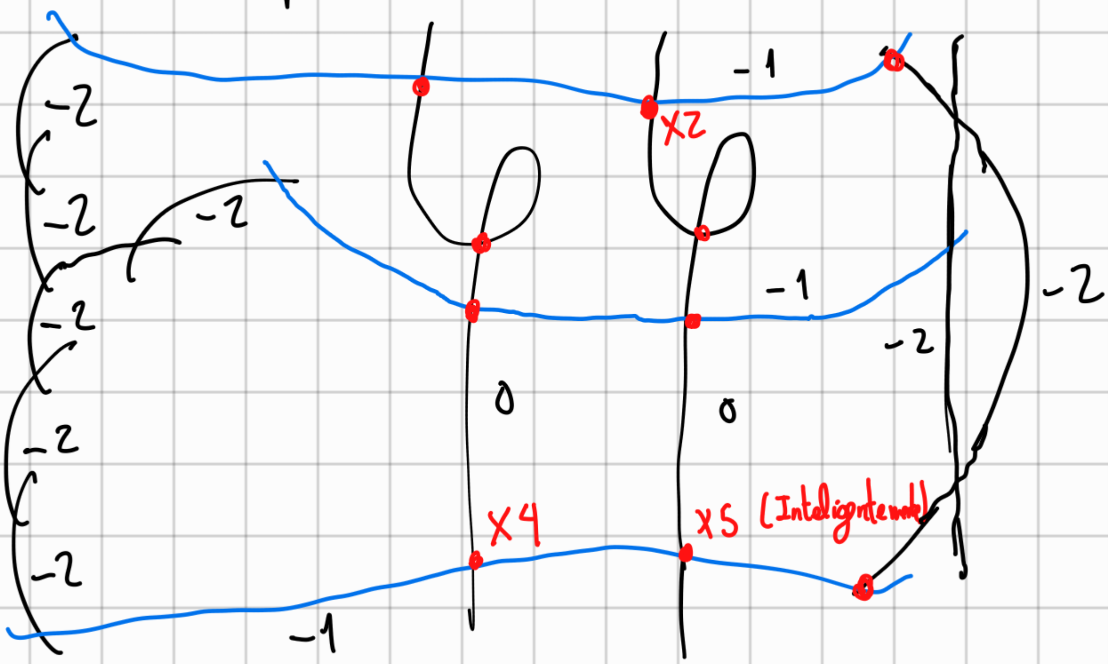
Toman pencil de cúbicas:

$$\Gamma_{v,\mu} = \{ v AB + \mu L^3 = 0 \}$$

$$[v:\mu] \in \mathbb{P}^1.$$



Salen fibras singulares $(IV)^*$, $2I_1$, I_2 al tomar la fibración elíptica asociada a este pencil:



Al realizar los blow-ups marcados en rojo: obtenemos las siguientes cadenas de Wahl

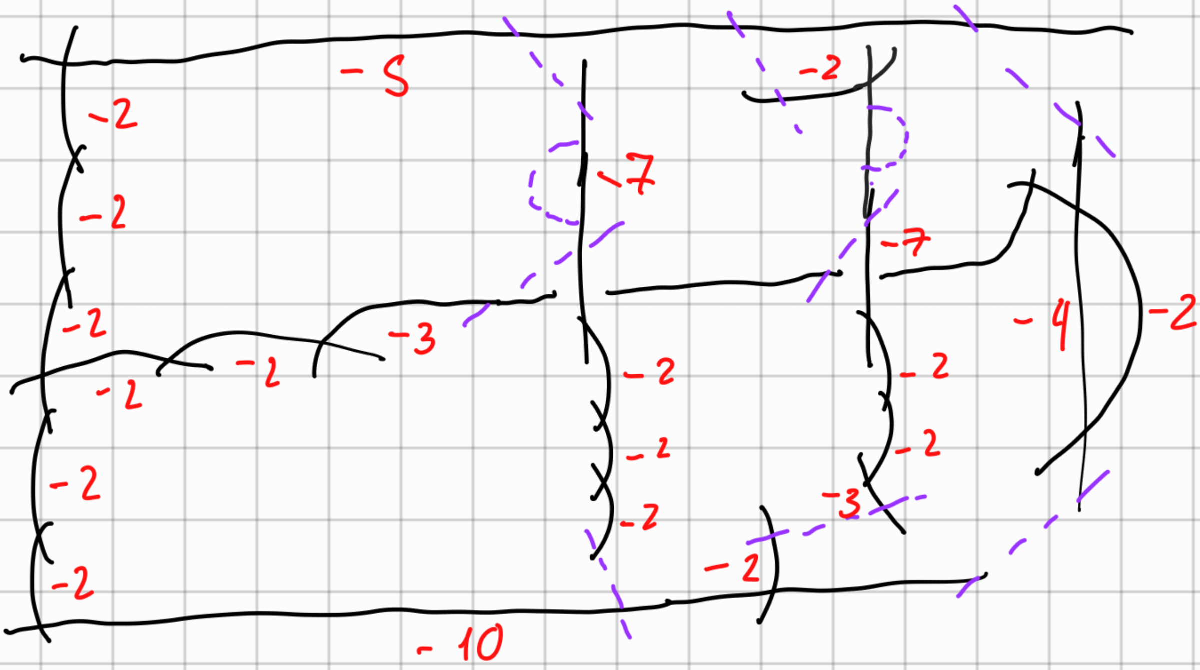
$C_1 : [2, 10, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3]$

$C_2 : [7,2,2,2,2]$

$C_3 : [2,7,2,2,2,3]$

$C_4 : [5,2]$

$C_5 = [4]$



$$\boxed{H^2(T_W)=0}$$

* Abajo está el criterio de obstrucción 0.

$$K_W^2 = -18+20 = 2, \quad p_g = q = 0.$$

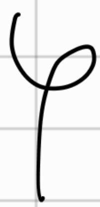
$$0 \to \underset{\substack{\| \\ \mathbb{C}}}{H^1(T_W)} \to \Pi^1_{QG} = \mathbb{C}^6 \to \mathbb{C}^5 \to 0.$$

*

$$E \subseteq X \xrightarrow[\pi]{sing} W$$

$H^2(T_W)=0$?

$I_n =$ 

$I_1 =$ 

(0) $H^2(T_W) \cong H^2(T_X(-\log(E))) \cong H^0(\Omega^1(\log(E)) \otimes K_X)$

(1) $\begin{array}{c} Y \\ \big\downarrow \\ \mathbb{P}^1 \end{array}$ fib elíptica $\quad I_n + I_m +$ cosas ...

$$\Rightarrow H^2(T_Y(-\log(I_n + I_m))) = 0.$$

(2) Principio agregan/borran: $\begin{cases} (-1)\text{-curvas}: \\ (-2)\text{-curvas}: \text{ Agregan conf ADE pero disjuntas a la conf inicial.} \end{cases}$