SGA 13/09

Kollar - Shepherd - Barron (1988)

¿Cómo pensar sobre $\mathrm{Def}\left(\frac{1}{m}(1,q)\right)$?

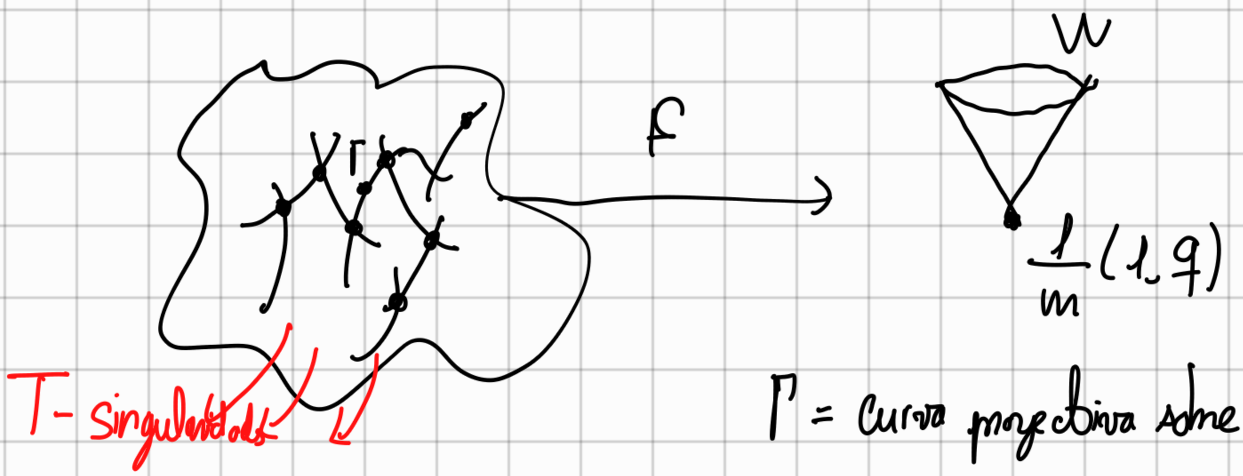
Dados $0<q<m$ coprimos, $\frac{1}{m}(1,q) :=$ germen en $(0,0)$ $\mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$

C.q.S.

Usando la teoría de Mori, KSB pudieron interpretar $\mathrm{Def}\left(\frac{1}{q}(1,m)\right)$.

$$\begin{array}{c}\text{Componentes irreducibles} \\ \text{de } \mathrm{Def}\left(\frac{1}{q}(1,m)\right) \\ \text{reducido}\end{array} \equiv \begin{array}{c}\text{P-resoluciones} \\ \text{de } \frac{1}{m}(1,q).\end{array}$$

Sea $\overline{W} = \frac{1}{m}(1,q)$. Una P-resolución de $\overline{W}$ es un morfismo propio birracional $f: W \to \overline{W}$ tal que solo tiene T-singularidades y K_W es amplio relativo a f.



Γ = curva proyectiva sobre $\Gamma \cdot K_W > 0$.

(1) Toda deformación de $\frac{1}{m}(1,q)$ proviene de una $\mathbb{Q}$-Gorenstein de W para alguna P-resolución.

(2) Para P-resolución dada su imagen es una componente de $\mathrm{Def}\left(\frac{1}{n}(1,q)\right)$

$\boxed{\text{Obs}}$ - Mori:

$$\begin{tikzcd}
\overline{W} \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[d] & \overline{\mathcal{W}} \arrow[d] \\
0 \arrow[r, phantom, "\in"] & \mathbb{D}
\end{tikzcd}$$

una deformación cualquiera.

SNC

$$\begin{tikzcd}
& \overline{\overline{\mathcal{W}}} \text{ suave} \arrow[dl] \arrow[ddd] \arrow[dr, "\text{reducción semiestable}"] & \\
& & \overline{\mathcal{W}} \\
\mathcal{W}_{can} \arrow[rr] \arrow[dr, "\substack{\text{Singularidades}\\ \text{terminales}\\ \text{para el 3-fold}}"'] & & \mathcal{W} \arrow[dl] \\
& \mathbb{D} &
\end{tikzcd}$$

¿Cómo describo P-resoluciones?

Def: Una resolución $f : X \xrightarrow{\text{suave}} \overline{W}$ <u>maximal</u> si

$$K_X = f^* K_{\overline{W}} - \sum a_i E_i$$ donde $0 < a_i < 1$, y para todo morfismo propio birracional $g : Z \to X$ el cual no es isomorfismo, tenemos $K_Z = h^* K_W - \sum b_j F_j$, $h = f \circ g$ y algún $b_j \leq 0$.

Lema: (3.13, 3.14)

Existe una única resolución maximal $X_{max} \to \overline{W}$ y toda P-resolución W está dominada por X_{max}, i.e, $\exists$ $X_{max} \to W$ tal que el diagrama conmuta.

Dem: (Sketch).

Si W no estuviera dominada por X_{max}, entonces tendríamos:

$$\begin{tikzcd} X_{max} \arrow[r] \arrow[dr, dashed, "\varphi"', "\text{Punteada}"] & \cdots \arrow[r] & X_{min} \arrow[r] & \overline{W} \\ & W \arrow[urr, "\text{P res.}"'] & & \end{tikzcd}$$

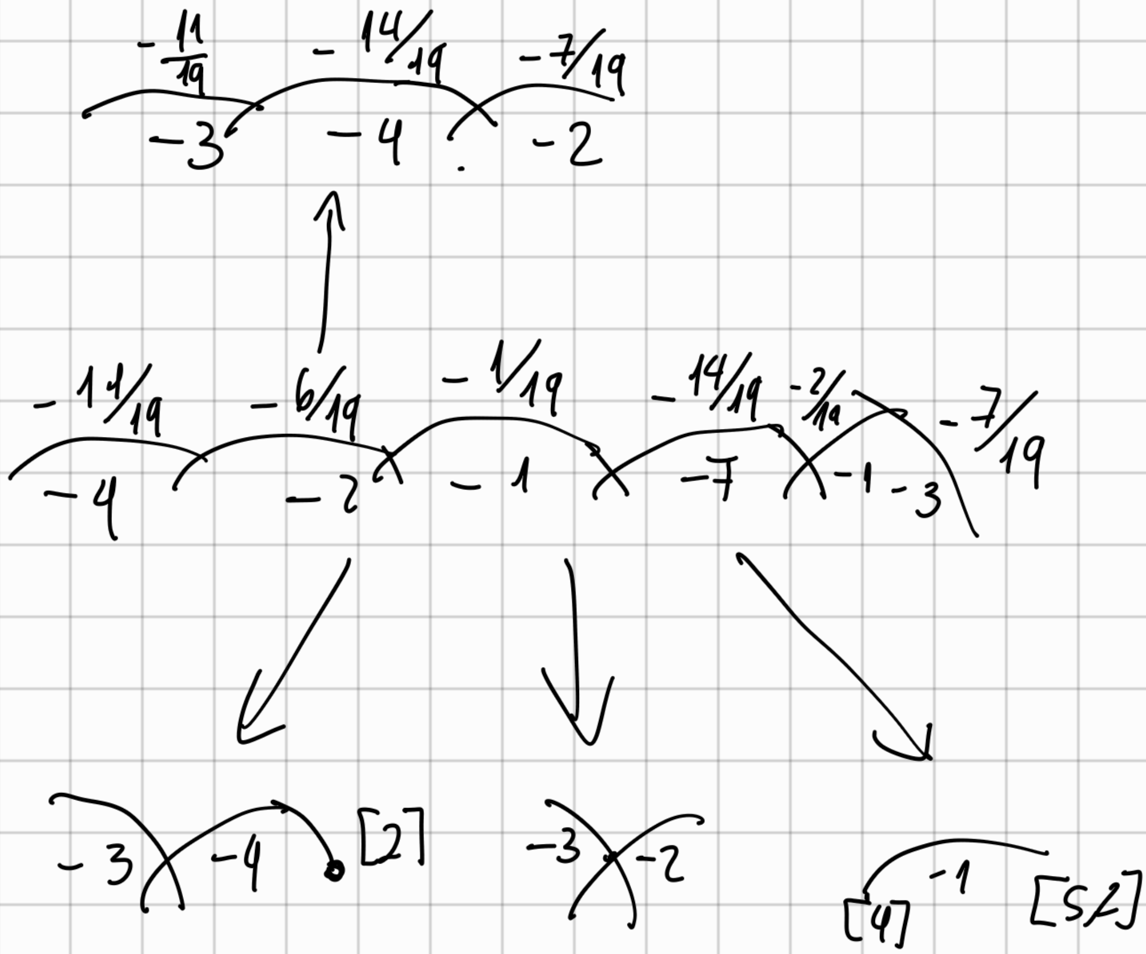
y por lo tanto habría $C \subseteq W$ curva tal que $\varphi^{-1}(C) = \{p\}$. Por la propiedad de ser maximal, observamos que C tiene mult no negativa en K_W, pero al mismo tiempo al tener $K_W \sim -E$ para algún $E \geq 0$, entonces $C \not\subseteq Supp(K_W)$. Esto contradice que K_W sea amplio porque $K_W = -(E \cdot C) < 0$.

P_{res}:

Conjetura de Kollar: $\exists$ - Generalización de P-resolución de las cuales a través de def $\mathbb{Q}$-Gorenstein describen todos las def de sing racionales.

H. Park, D. Shin 2021 Arxiv : Sandwich-Singularities.

Ej: $\frac{1}{19}(1,7)$, $\frac{19}{7} = 3 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{2}}$.



¿Cómo encontrar estas P-resoluciones más sistemáticamente?

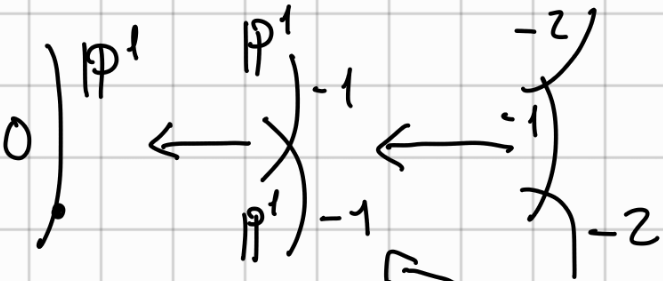
¡Con las fracciones duales del 0! Estas fracciones continuas:

$$\frac{m}{q} = x_1 - \cfrac{1}{x_2 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{x_\ell}}}$$

permiten $x_i = 1$ mientras la fracción siga teniendo sentido.

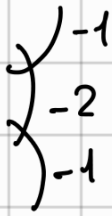
Clasificación:

Todas vienen del proceso de hacer blow-up.



$$2 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2}} = 0$$

$$0 \qquad 1 - \frac{1}{1} = 0$$



$$1 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{1}} = 0$$

¡Todas!

$$a + 1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{b+1}} = a - \frac{1}{b}.$$

* $0 < q < m$ coprimos dados

$$\frac{m}{q} = [e_1, \ldots, e_\ell]$$

$$\frac{m}{m-q} = [b_1, \ldots, b_s] \to \text{fracción continua dual.}$$

$$[b_s, \ldots, b_1, 1, e_1, \ldots, e_\ell] = 0$$

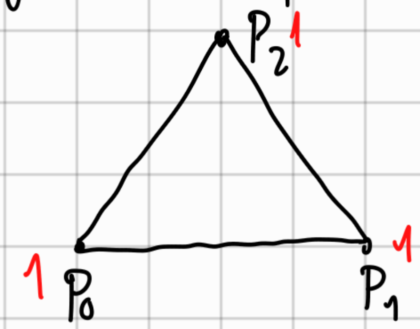
Def: $K(\overline{W}) = \{ [k_1, \ldots, k_s] = 0 \mid 1 \leq k_i \leq b_i \}$.

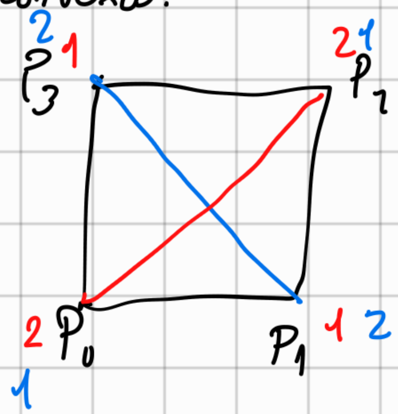
$\updownarrow$

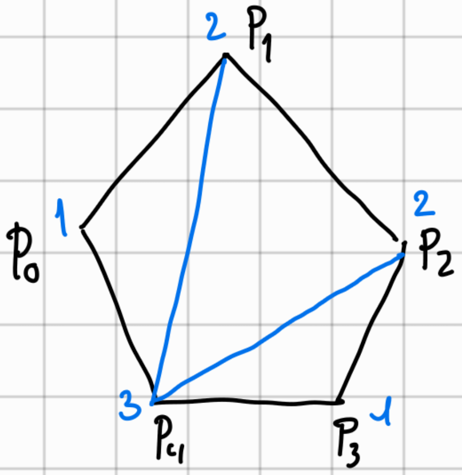
P-resoluciones.

$\therefore$ # Componentes $\mathrm{Def}(\overline{W}) = |K(\overline{W})|$

Triangulaciones de polígonos convexo:







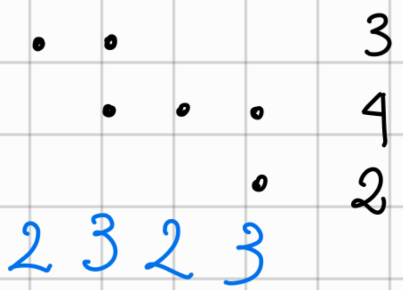
Definiendo como v_i el número de triángulos que tienen P_i como uno de sus vértices y $S =$ # vértices. Se sigue que:

Teo 1: $v_0 + \dots + v_S = 3(S-1)$

Cor 1: $|K(\bar{w})| \leq \frac{1}{S}\binom{2(S-1)}{S-1}$

* Continuando con el ejemplo de KSB.

$\frac{19}{7} = [3,4,2]$, calculamos su dual:



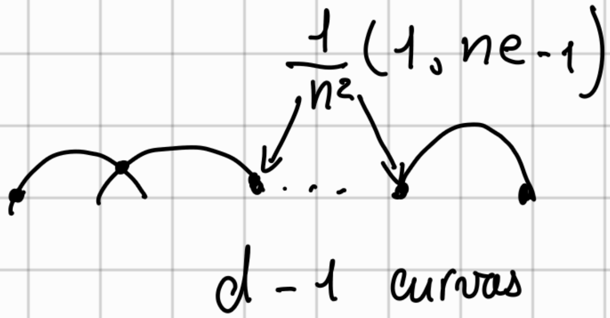
$\frac{19}{12} = [2,3,2,3]$. Dentro de la lista de fracciones parciales del 0, tenemos [2,1,3,1], [1,3,1,2], [2,2,1,3], [1,2,2,1], [3,1,2,2] Pero dentro de la lista vemos que los únicos que satisfacen las desigualdades pedidas son:

$$[1,3,1,2],\ [2,2,1,3],\ [1,2,2,1].$$

* Antes de explicar la biyección $P\text{res} \longleftrightarrow K(\overline{W})$ describimos otra correspondencia 1-1, esto es con M-resoluciones.

Def: Una M-resolución de $\overline{W}$ es una resolución parcial $f: W \to \overline{W}$ tal que W solo tiene singularidades de Wahl y K_W es nef relativo a f.

Dada una P-resolución, obtenemos una M resolución así:

- T-sing $\frac{1}{dn^2}(1, dne-1)$ $\longleftarrow$ 

- ADE $\longleftarrow$ Resolver minimalmente.

De esta manera obtenemos $\{\text{M-resoluciones}\} \xleftrightarrow{1-1} \{\text{P-resoluciones}\}$

Ahora, describiremos la manera de obtener la fracción asociada a una M-resolución. El proceso inverso se obtiene de manera análoga.

Tenemos que una M-resolución es de la forma: $\left[\binom{n_i}{a_i}\right] = \left[\frac{n_i^2}{n_i a_i - 1}\right]$

$$\left[\binom{n_0}{a_0}\right] \overset{-c_0}{\text{———}} \left[\binom{n_1}{a_1}\right] \overset{-c_1}{\text{———}} \left[\binom{n_2}{a_2}\right] \text{———} \cdots$$

En donde cada nodo es una singularidad de Wahl o un punto suave.

En caso de que $\left[\binom{n_0}{a_0}\right]$ es singular, de la notación

$$[b_1, \dots, b_s] - (1) - \left[\binom{n_0}{a_0}\right] \text{———} \left[\binom{n_0}{a_0}\right] \text{———} \cdots \text{———} \left[\binom{n_0}{a_0}\right] \overset{cd_1}{\text{———}} \left[\binom{n_1}{a_1}\right] \text{———} \cdots$$

Llegamos a

$$[b_1, \dots, b_{i-1}, b_i - d_{i_1}, \dots, b_s] - (cd_1) - \left[\binom{n_1}{a_1}\right] - \cdots -$$

En donde $[b_1, \dots, b_{i-1}] = \frac{n_0}{n_0 - a_0}$.

Si $b_{i_1} - d_{i_1} = 1$, contraemos todas las curvas (-1) de: $[b_1, .., b_{i-1}, b_i - d_i, \dots, b_s]$

Luego de este proceso (cd_1) termina siendo -1 y repetimos el algoritmo con $\binom{n_1}{a_1}$.

* En caso de que $\left[\binom{n_0}{a_0}\right]$ fuera suave hacemos $d_1 = 1$ y contraemos las curvas (-1) dentro de $[b_s, .., b_1 - 1]$.

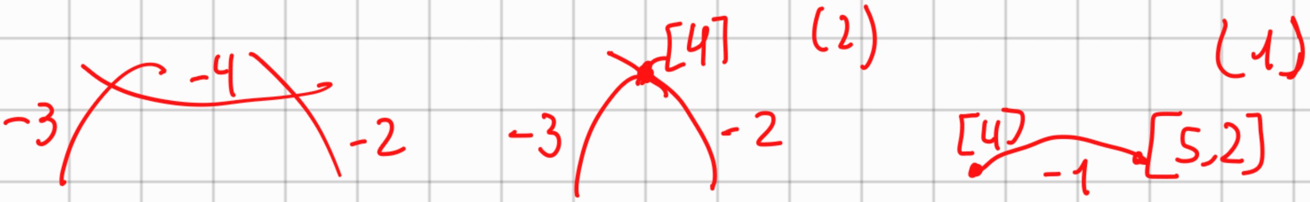
*De igual forma, se tiene que $[b_1, .., b_{i_1} - d_{i_1}, \dots, b_{i_2 - 1}] = \frac{n_1}{n_1 - a_1}$

La fracción parcial del cero de la M-resolución es:

$$[b_1-d_1,\dots,b_s-d_s]=0.$$

Ejemplo: Para $\frac{19}{7}=[3,4,2]$ tenemos $\frac{19}{19-7}=[3,2,3,2]$

En donde las M-resoluciones son:



(*) Vemos que $[3,2,3,2]-(1)-\left[\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right]-(1)-\left[\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right]$

nos da la información de que $d_2=1$ y así,

$$[3,2,2,2]-(1)-\left[\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right] \quad \text{con} \quad \frac{3}{3-1}=[2,2],$$

lo cual nos permite obtener $[3,1,2,2]$ y así ver que $[2,2,1,3]$ es su fracción parcial asociada.

(2) Con $[3,2,3,2]-(3)-\left[\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right]-(2)$, tenemos que la fracción parcial se convierte en $[3,2,3,1]\xrightarrow[\text{blow-down}]{}[3,2,2]$

Así llegamos a: $[3,2,2]-(1)-\left[\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right]-(2)$. Luego, porque $\frac{2}{2-1}=[2]$, entonces la fracción se vuelve $[3,1,2]$, lo cual con blow-downs se transforma en $[1]$. Para el último paso contraemos el $[1]-(1)$ que resulta.

- A nivel de los d_i este proceso resulta en restar 1 en las posiciones marcadas

$$[\underline{3},\underline{2},3,\underline{2}]=[2,1,3,1].$$

Así, la fracción del $\bigcirc$ corresponde a $[1,3,1,2]$.

- $[1,2,2,1]$ se obtiene de forma similar de $(3)-(4)-(2)$.

En [KSB] Sección 3 se calcula la dimensión de la componente de $Def(\overline{W})$ asociada al espacio de deformaciones $\mathbb{Q}$-Gorenstein de una P-resolución $W\to\overline{W}$.

Explícitamente, esta es

$$\sum_{i=1}^{l}(e_i-3)+2\sum_{i=1}^{s}b_i-2\sum_{i=1}^{s}K_s-2$$

Siendo $[k_1, \dots, k_s] = 0$ asociada a la P-resolución.

Así como en el ejemplo anterior, la resolución minimal es $[1, 2, \dots, 2, 1]$ y es de dimensión máxima. A esta se le llama Componente de Artin

(Son aquellas deformaciones que permiten resoluciones de singularidades luego de un cambio de base finito).

Ej: Para $\frac{1}{19}(1,7)$ calculamos las dimensiones de las componentes de $Def\left(\frac{1}{19}(1,7)\right)$.

- Puesto que $\frac{19}{7} = [3,4,2]$, entonces

$$\sum_{i=1}^{l} (e_i - 3) = (3-3) + (4-3) + (2-3) = 0.$$

- $\frac{19}{19-7} = [2,3,2,3]$ y las fracciones de 0 son: $[1,2,2,1]$
  $[1,3,1,2]$
  $[2,2,1,3]$

Sus respectivas dimensiones son:

- $2(10-6) - 2 = 6$
- $2(10-7) - 2 = 4$
- $2(10-8) - 2 = 2$