SGA 20/09

W-surfaces: Jonathan Wahl 81 (Topology)

Hooijenga - Wahl 86 (Topology)

Kollár 2005 ("Einstein Metrics").

Teorema: (Kollár: "Flips - Flops, MMP, etc").

Sea S_t degeneración de superficies no regladas sobre una superficie sobre un disco $\mathbb{D} \ni t$.

$\Rightarrow \exists$ (salvo cambio de base) una modificación birracional de las familias

$$\begin{array}{ccc} W & \subseteq & \mathcal{W} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \in & \mathbb{D} \end{array}$$

tq

- $K_{\mathcal{W}}$ es $\mathbb{Q}$-Cartier
- $K_{\mathcal{W}}$ nef
- W_t, $t \neq 0$ modelos minimales (suaves) de S_t

y W_0 tiene singularidades (1) Wahl $\left(\frac{1}{n^2}(1, na-1)\right)$

~~(2)~~ Orbifold doble (normal crossings)

~~(3)~~ SNC.

• Nos enfocamos solo en el caso Wahl.

Def: Una W-superficie es una sup normal proyectiva W + una

$$\begin{array}{ccc} W_0 & \subseteq & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \in & \mathbb{D} \end{array}$$

deformación propia.. tal que:

(1) W_0 tiene solo singularidades de Wahl.

(2) W es un 3-fold con K_W - $\mathbb{Q}$-Cartier.

(3) $W_0 \subseteq W$ y en fibra reducida.

(4) W_t es no singularidad, $t \neq 0$.

Si W_0 es suave, W-sup se dice suave.

* Se desarrollará estudio sistemático de W-superficies.

(Moderno / Clásico)

Generalizar: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Castelnuovo} \\ \text{Clas - de Enriques Kodaira} \end{array} \right.$

Obs: Los invariantes $q(W_t)$, $P_g(W_t)$, $K^2_{W_t}$, $\chi_{top}(W_t)$

son constantes.

* No ejemplo: π_1 no necesariamente es cte.

* W-sup es modelo minimal. Si K_W nef $\iff$ K_{W_0} es nef.

Si K_{W_0} es big y nef $(K^2_{W_0} > 0) \Rightarrow K_{W_t}$ big y nef
(W_t sup de tipo general)

$$\begin{tikzcd} W \arrow[d] & \subseteq & \mathcal{W} \arrow[d] \\ 0 & \in & \mathbb{D} \end{tikzcd} \longrightarrow \begin{tikzcd} W_{can} \arrow[d] & \subseteq & \mathcal{W} \arrow[d] \\ 0 & \in & \mathbb{D} \end{tikzcd}$$

$(P \in W)$ germen de sing normal dim 2.

$$\Rightarrow \begin{tikzcd} p \in W \arrow[d] & \subset & \mathcal{W} \arrow[d] \\ 0 & \in & \mathbb{D} \end{tikzcd}$$

suavización.

$\therefore$ W_t = Fibra de Milnor (todos difeo)
$\cong$
M y es homotópico a un CW-complejo de dim 2 real.

4-manifold.
con borde = Link de $(p \in W)$

$$\overset{\shortparallel}{\partial B}\cap(p\in W)$$

Caso A_n, es homotópicamente equivalente  $\cdot\, n = \bigvee_n S^2$.

Por ejemplo, $\left(p\in \frac{1}{m}(1,q)\right) \Rightarrow$ su Link es $S^3 \big/ (x,y)\mapsto(\mu_m x, \mu_m^q y)$

$=$ Lens $= L$.

$$H_0(L) = H_3(L) = \mathbb{Z},\quad H_1(L) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\quad H_2(L) = 0.$$

Obs: Como M es $\sim$ CW complejo de dim 2.

$b_i = \text{rango}\left(H_i(M)\right) \Rightarrow b_1 = 0$

$b_2 =$ Número de Milnor $= \#$ ciclos que muere.

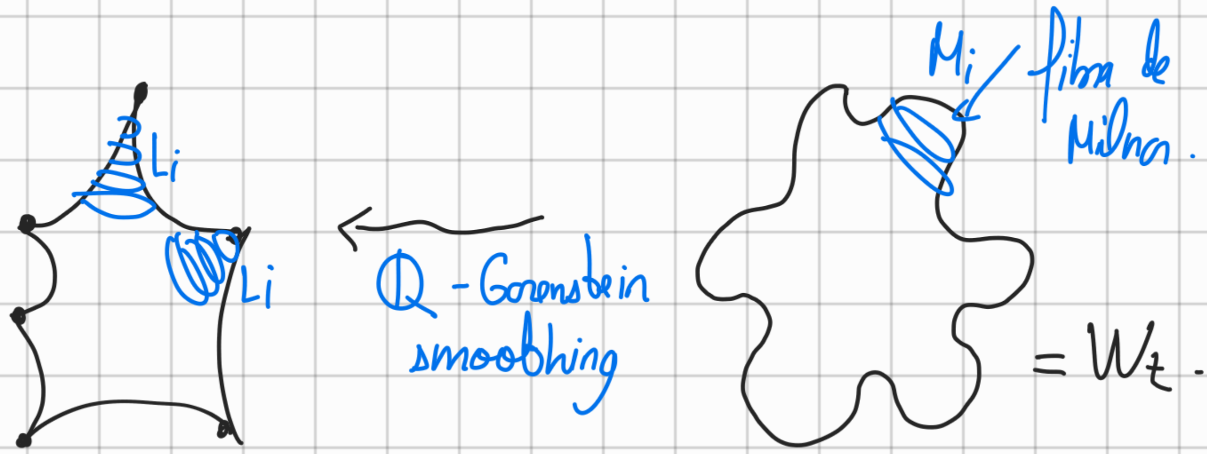
* Si M es la fibra de Milnor de una suavización $\mathbb{Q}$-Gorenstein de $\frac{1}{n}(1, na-1)$

$$\Rightarrow H_0(M) = \mathbb{Z}$$
$$H_1(M) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$
$$H_2(M) = 0$$

Conj (Wahl): Existe lista precisa de sing 2-dim normales con suavización $b_2 = 0$.

Ej: $(p \in W) \in A_n \Rightarrow H_0(M) = \mathbb{Z},\ H_1(M) = 0$
y $H_2(M) = \mathbb{Z}^n$.

- Global



$$W^\circ = W \setminus \{P_1, \dots, P_\ell\}, \quad P_i = \text{Sing de } W.$$

$$\Rightarrow f : (W^\circ, \cup L_i) \longrightarrow (W_t, \cup M_i)$$

[LW'86] : $L_i \hookrightarrow M_i$

$$\mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z} \cong H_1(L_i) \twoheadrightarrow H_1(M_i) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Tomando sucesión exacta larga en homología relativa.

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_i H_2(L_i) \arrow[r] & H_2(W^\circ) \arrow[r] \arrow[d] & H_2(W) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \bigoplus_i H_1(L_i) \arrow[r] \arrow[d] & H_1(W^\circ) \arrow[r] \arrow[d] & H_1(W) \arrow[r] & 0 \\
\bigoplus_i H_2(M_i) \arrow[r] & H_2(W_t) \arrow[r] & H_2(W) \arrow[r] & \bigoplus_i H_1(M_i) \arrow[r] & H_1(W_t) \arrow[r] & H_1(W \arrow[u] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Asumiendo que : $H^1(\mathcal{O}_{W_t}) = H^2(\mathcal{O}_{W_t}) = 0$

$(W\text{-superficie})$ $\quad$ sing $\quad$ género geom

$$\begin{array}{ccccccccc}
\bigoplus_i \cancel{H_2(L_i)}_{0} & \to & H_2(W^0) & \to & H_2(W) & \to & \bigoplus_i H_1(L_i) = \mathbb{Z}/n_i^2\mathbb{Z} & \to H_1(W^0) \to & H_1(W) \to 0\\
 & & \downarrow & & \| & & \downarrow & \downarrow & \|\\
\bigoplus_i \cancel{H_2(M_i)}_{0} & \longrightarrow & H_2(W_t) & \to & H_2(W) & \to & \bigoplus_i H_1(M_i) = \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z} & \to H_1(W_t) \to & H_1(W) \to 0
\end{array}$$

$$H_2(W) = Cl(W)$$

$$H_2(W_t) = Cl(W_t) = Pic(W_t).$$

$$\therefore \quad 0 \to Pic(W_t) \to Cl(W) \to \bigoplus \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z} \to 0.$$

Ej: Decimos que $\begin{array}{ccc} W & \subseteq & \mathcal{W} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \in & \mathbb{D} \end{array}$ es una W-superficie de Enriques

si:

1) W_t, $t \neq 0$ es superficie de Enriques

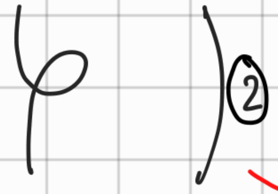
$$K3 \xrightarrow{2:1} W_t, \quad \pi_1(W_t) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$\Downarrow$$

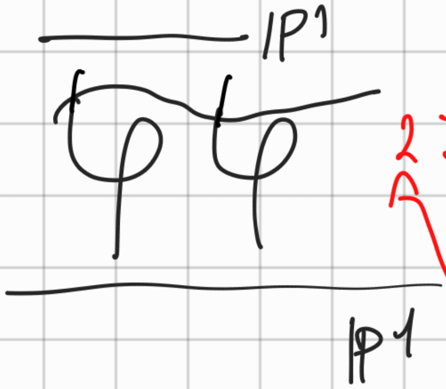
$$2K_{W_t} \sim 0 \iff K3 \xrightarrow{2:1} W_t$$

2) K_W es nef.

$\Rightarrow$ Se demuestra [KW 90] que W posee únicamente singularidades de la forma $\frac{1}{4}(1,1)$. Si $\pi : X \to W$ es la resolución mínimal de W, entonces X es blow up de alguna de las siguientes:

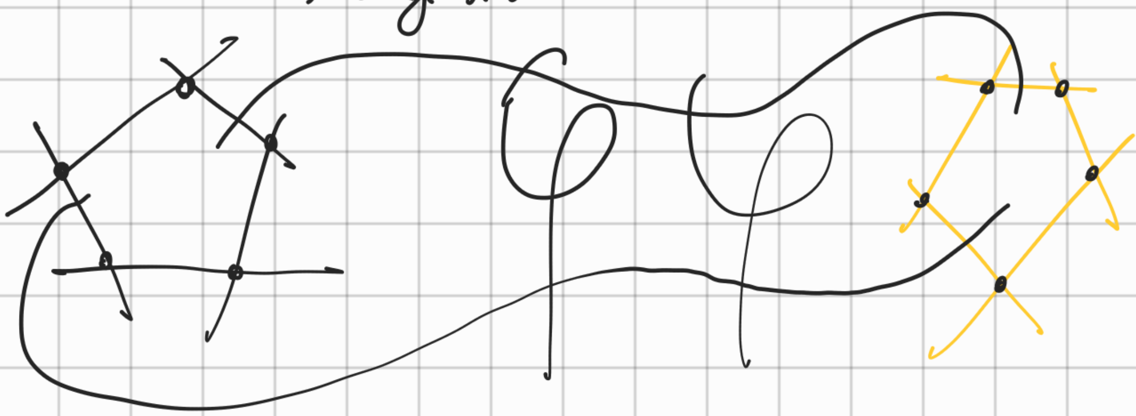
(1)  = racional (Halphen índice 2)

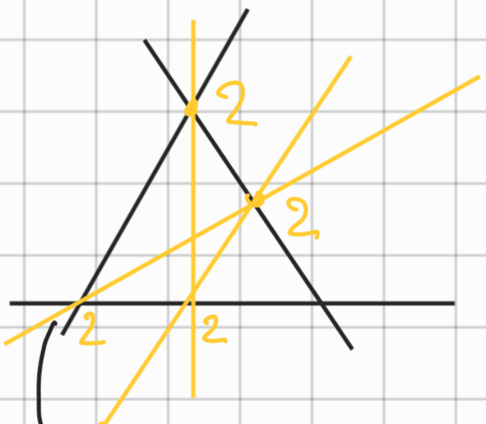
$\rightarrow$ no es (-1).

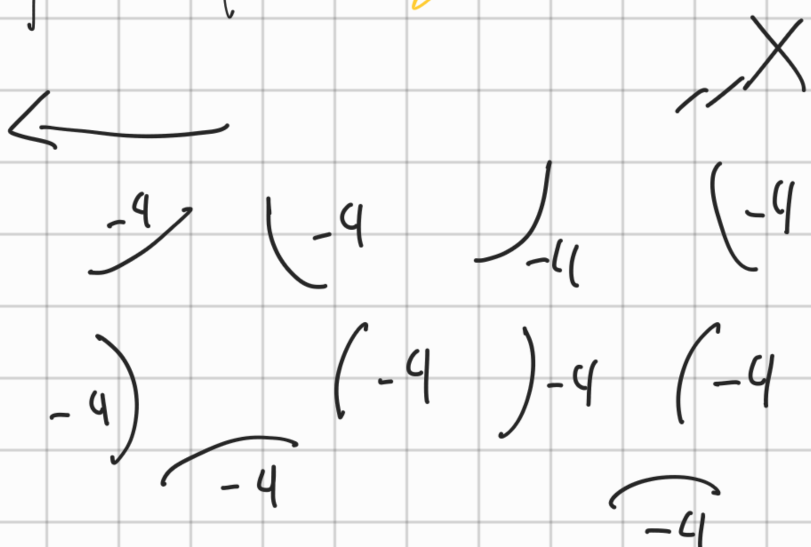
(2) 

Una fibración jacobiana racional mínima sobre fibras reducidas de tipo II, III, IV o I_n.

Construimos de la más degenerada:







$$W \leftarrow W_t$$

con 10 singularidades.

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathbb{T}^1 \to \mathbb{C}^{10} \to 0.$$ (El espacio de deformaciones $\mathbb{Q}$-Gorenstein tiene dimensión 10)

* El Retículo Coble-Mukai:

Para $\pi : X \to W$ resolución minimal en ejemplo anterior, si $\{C_i\}_{i=1}^{s}$ son las curvas excepcionales disjuntas de las singularidades [4], entonces

$-2K_X \sim C_1 + \cdots + C_s$ (Superficie de Coble de tipo K3).

Si $B_i \in Pic(X)$ corresponde al C_i, definimos el retículo Coble-Mukai como:

Def: $CM(X) \subseteq Pic(X) + \sum_i \mathbb{Z}\left[\frac{C_i}{2}\right]$ donde $x \in CM(X) \iff x \cdot B_i = 0 \ \forall i$.

Teorema: De la sucesión exacta $0 \to Pic(W_t) \to Cl(W) \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_{i=1}^{s-1} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$, tenemos que $Ker(\varphi)/\langle K_{W_t} \rangle \cong CM(X)$.

Dem: Del pullback $\pi^* : Cl(W) \to Pic(X) + \sum_i \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2} C_i\right]$

por definición $\pi^*(Pic(W_t)) \subseteq CM(X)$. Notamos que $\pi^*|_{Pic(X)}: Pic(W_t) \to CM(X)$ es sobre.

Sea $D = D' + \sum_i \frac{a_i}{2} B_i \in CM(X)$, dado que $D \cdot B_j = 0 \ \forall j$, entonces $0 = C_j \cdot D' - 2a_j \Rightarrow C_j \cdot D' = 2a_j$, lo cual implica que $D' = \hat{T}$ donde $T \in Pic(W_t)$, pues $Pic(W_t)$ en $Cl(W)$ son aquellos que su transformada estricta tienen intersección par con los C_j.

Si tenemos que $\pi^*(D) = 0 \Rightarrow \pi^*(2D) = 0 \in Pic(X)$, puesto que ? tiene 2-torsión en $Pic(W_t)$, tenemos que $D \sim K_{W_t}$.