SGA 27/09

MMP para W-superficies. I

Teoría de Mori
Como encontrar modelos minimales en la clase de una variedad proyectiva.

Cone MMP

$k = \mathbb{C}$.
$K_{\tilde{X}} \cdot \Gamma < 0$

$$K_{X_{min}} \cdot \Gamma \geq 0 \quad \forall \Gamma \quad \forall \text{ curvas}$$

Mori 1988 : Se pueden hacer en dim 3
KSB 88?
Kollar - Mori (1992) (170 pp).

Def: Una vecindad <u>extremal</u>

$$(\Gamma \subseteq W) \xrightarrow{F} (P \in \overline{W}).$$

morfismo biracional propio entre 3-folds normales tal que:

(1) K_W es $\mathbb{Q}$-Cartier y W tiene singularidades terminales.

2) $F^{-1}(p) = \Gamma$ una curva irreducible.

3) $K_W \cdot \Gamma < 0$.

flip — Contracción divisorial

$\mathrm{Exc}(\Gamma)$ $\sim$
y $p \in \widetilde{W}$ no es terminal

$\Downarrow$

$$\exists\ \Gamma \subseteq W \dashrightarrow W^+ \supseteq \Gamma^+$$

$$W \xrightarrow{\text{Flip}} p \in \overline{W} \leftarrow W^+$$

$\mathrm{Exc}(\Gamma) =$ divisor
y $D \subseteq W$

$$D \xrightarrow{\text{Contrae}} \underbrace{p \in \overline{W}}_{\text{Singularidades terminales.}}$$

- $K_W \cdot \Gamma < 0$
- $K_{W^+} \cdot \Gamma^+ > 0$

¿Cómo trabajan con esto?

Mori 2002: Clasificación de vecindades extremales tipo k2A

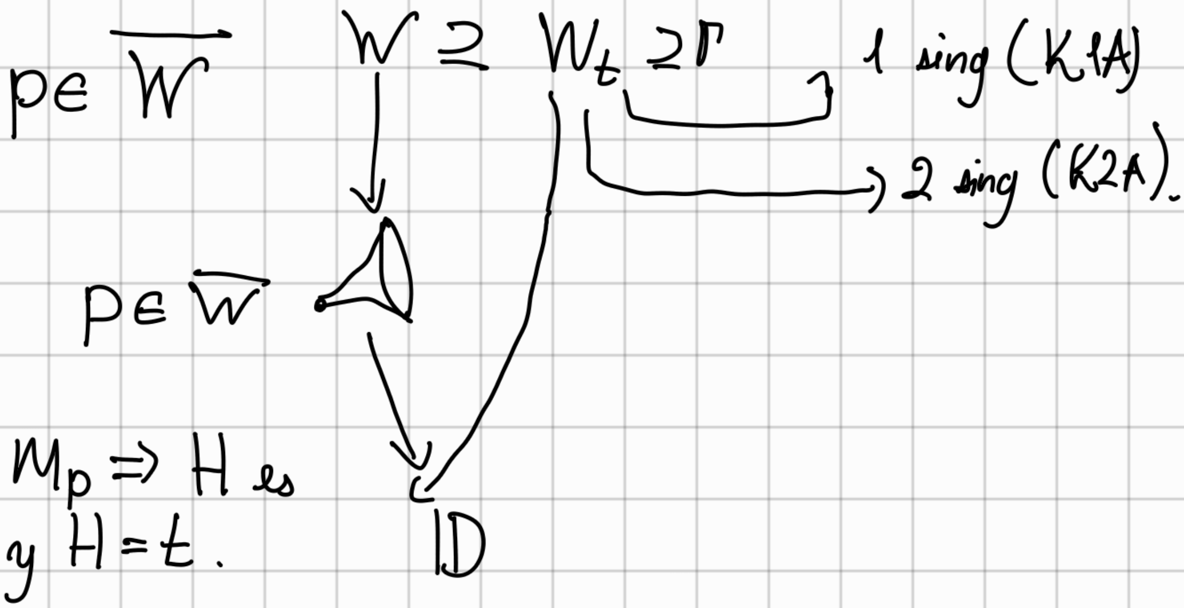
flip

$\underbrace{\text{Semi-estables}}_{\text{Más complicados}}$

$\boxed{\text{Excepcionales}}$ ← $\boxed{\text{KM 92}}$

$D \in |-K_W|$
es superficie y posee singularidades de tipo: ADE.

* En el caso semiestable, el threefold admite deformación. Más precisamente, las vecindades extremales se pueden ver como suavizaciones sobre $\mathbb{D}$.



$H \in \mathcal{M}_p \Rightarrow H$ es superficie y $H = t$.

* Asumimos $b_2(W_t) = 1$.

• Nuestras vecindades extremales:

Sean $(P \in \overline{W})$ germen c.q.s y $f: W \to \overline{W}$ una resolución parcial de $\overline{W}$ donde $\Gamma := f^{-1}(P)$ es curva racional suave que pasa a lo sumo sobre dos singularidades de Wahl sobre W.

Supongamos que $K_W \cdot \Gamma < 0$ y $(W \subseteq \mathcal{W}) \to (0 \in \mathbb{D})$ es suavización $\mathbb{Q}$-Gorenstein de W.

Def: Si $(\overline{W} \subseteq \overline{\mathcal{W}}) \to (0 \in \mathbb{D})$ es el blow-down de la deformación de arriba, llamamos a $(\Gamma \subseteq W) \to (P \in \overline{W})$

una vecindad de tipo mk1A o mk2A, dependiendo de cuantas singularidades tenga Γ.

$$\begin{tikzcd} \Gamma \subseteq W \subseteq \mathcal{W} \arrow[d] \arrow[dr] & \\ 0 & p \in \overline{W} \subseteq \overline{\mathcal{W}} \arrow[dl] \\ \mathbb{D} \arrow[u, phantom, "\in"] & \end{tikzcd}$$

No obstante, $K_{\mathcal{W}}$ no es nef.

- Estas vecindades harán todo el MMP para la situación de W superficies

¿Cómo se hace el flip?

$$\begin{tikzcd} \Gamma \subseteq W \subseteq \mathcal{W} \arrow[rr, dashed, "\text{Flip}"] \arrow[dr] & & \mathcal{W}^+ \supseteq W^+ \supseteq \Gamma^+ \arrow[dl] \\ & \overline{\mathcal{W}} & \\ & \overline{W} & \\ & p & \end{tikzcd}$$

$\Gamma = \mathbb{P}^1$

Wahl

$\Gamma \cdot K_W < 0$

Siempre hay al menos una singularidad

P- resolución extremal

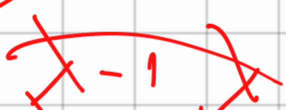
Sing de Wahl $\left\{ \mathbb{P}^1 = \Gamma^+ \right.$

2, 1, 0 singularidades

$p = \frac{1}{\Delta}(1, \Omega)$

$\mathbb{P}^1$

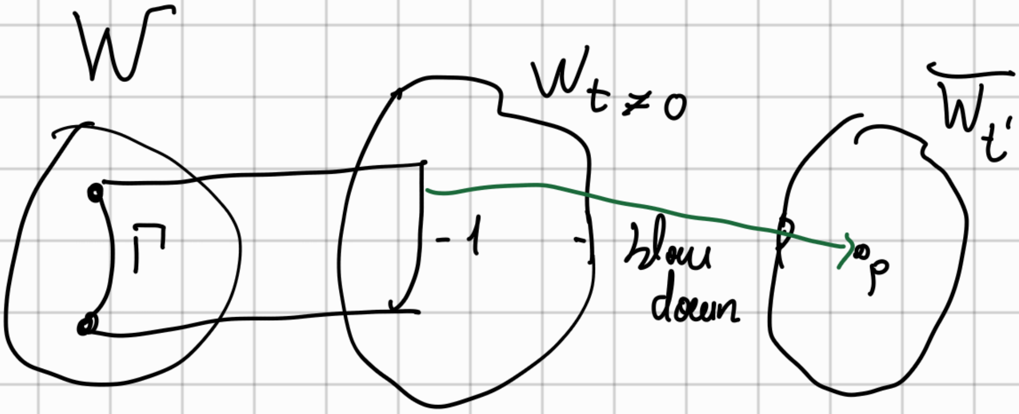
y con la resolución minimal de cada singularidad



¿Cómo se hace la la contracción divisorial?

Si $(\Gamma \subseteq W) \to (P \in \overline{W})$ es contracción divisorial, entonces P es singularidad de Wahl y la contracción del divisor excepcional induce el blow-down entre las fibras suaves de $W \to \mathbb{D}$ y $\overline{W} \to \mathbb{D}$.

En dibujos:



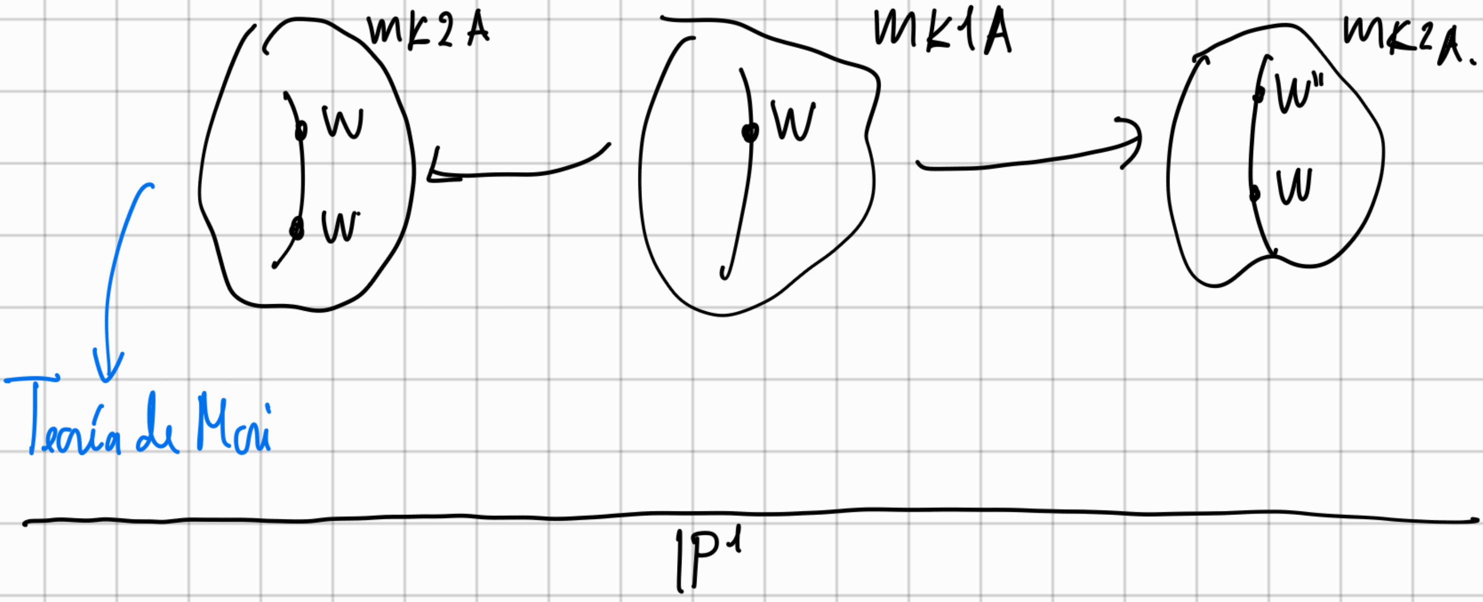
$$
\begin{array}{ccccccccc}
\Gamma & \subseteq & W & \subseteq & \mathcal{W} & \supseteq & W_t & \supseteq & (-1) \text{ curva} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
P & \in & \overline{W} & \subseteq & \overline{\mathcal{W}} & & & &
\end{array}
$$

$P \longrightarrow \frac{1}{n^2}(1, na-1) \quad \forall\, n,a \quad \gcd(n,a)=1.$

* Corriendo el mmp:

Si en el programa aparecen vecindades mk1A, entonces existen dos vecindades mk2A con la misma descripción numérica $\frac{1}{\Delta}(1,\Omega)$ y δ

Por lo tanto, mediante los mK2A es posible calcular sus flips y contracciones divisoriales.



Tomando $\delta \geq 2$ para cualquier vecindad mK2A tenemos valores numéricos que permiten determinar si la vecindad es un flip o divisorial

El algoritmo de Mori provee una familia infinita (trenes), tales que la vecindad $\mathbb{E}$ posee el mismo tipo que las otras $\mathbb{E}'$ (flip o divisorial) y la fibra central es la misma bajo modificación biracional.

Recursivamente se obtiene el tren y numéricamente se determina el tipo de vecindad.

Ejemplo: (Contracción divisorial)

$\frac{1}{4}(1,1) \Rightarrow \Delta = 4, \ \Omega = 1$ y $\delta = 2$

Toda vecindad divisorial mK1A/mK2A se obtiene a través del tren.

$$\overbrace{[4] - [2,\bar{2},6] - [2,2,2,\bar{2},8] - [2,2,2,2,2,\bar{2},10]}^{mK2A} - \cdots$$

Flip: $\frac{1}{11}(1,3) \Rightarrow \Delta = 11,\ \Omega = 3.$

De la P-resolución extremal $X^+ \to Y$ definida por $[4]-3$

$$\begin{matrix} [4] \\ -3 \end{matrix} \qquad K_W \cdot \Gamma^+ > 0$$

Se obtienen los trenes asociados a X^+:

$$\emptyset - [\bar{2},5,3] - [2,3,\bar{2},2,7,3] - [2,3,2,2,2,\bar{2},5,7,3] - \cdots$$

$$\underbrace{[4] - [2,\bar{2},5,4]}_{mK2A} - \underbrace{[2,2,3,\bar{2},7,4]}_{mK1A} - [2,2,3,2,2,2,\bar{2},5,7,4] - \cdots$$