SGA 04/10

MMP para superficies no singulares sobre $\mathbb{C}$.

La operación principal es blow-down (Castelnuovo).

$$X \xrightarrow{\text{blow-down}} X' \quad \text{(suave)}$$

$$\begin{array}{c} \cup \\ E \cong \mathbb{P}^1 \\ E^2 = -1 \end{array}$$

Si existe $\Gamma \cong \mathbb{P}^1$ curva en X' con $\Gamma \cdot K_{X'} < 0$.

- $\Gamma^2 < 0$
  - $\Gamma^2 = -1$
  - Adjunción $(-2 = \Gamma^2 + \Gamma \cdot K_{X'})$
  - volvemos y contraemos
- $\Gamma^2 = 0$
  - $\Downarrow$
  - $X' = \mathbb{P}_C(\mathcal{E})$
  - $\downarrow$
  - B (geométricamente reglada)
- $\Gamma^2 > 0$
  - $\Downarrow$
  - $\rho(X') = 1$
  - $-K_{X'}$ amplio
  - $\Downarrow$
  - $X \cong \mathbb{P}^2$

Estos dos son modelos minimales.

• Si X es tal que K_X es nef, entonces:

1) Es único
2) Enriques clasifica estos modelos minimales.

$\kappa = -\infty$	$\kappa = 0$		$\kappa = 1$	$\kappa = 2$
Reglados	K3	$\mathbb{C}^2/\Lambda$	$X \to B$ fib elíptica	Tipo general
	Enriques	Bielípticas		$q = 0$ / $q > 0$

$X \to \mathrm{Alb}(X)$ donde $\mathrm{Alb}(X)$ una variedad abeliana

Se tiene que $\dim(\mathrm{Alb}(X)) = q$. Por lo tanto, si $q=0$, $\mathrm{Alb}(X)$ es un punto y pierde relevancia.

• MMP para W-superficies:

Cuando W tiene solo singularidades de Wahl, recordamos que estas admiten suavización $\mathbb{Q}$-Gorenstein:

$$\begin{array}{ccc} W & \subseteq & \mathcal{W} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \in & \mathbb{D} \end{array}$$

K_W es nef $\Rightarrow K_{W_t}$ nef.

Las operaciones vienen de las vecindades extremales $\underbrace{\text{mk1A}, \text{mk2A}}_{\text{Flip/contracción divisorial}}$

Si K_W no es nef (Kollar–Kovacs)

$\Rightarrow \exists\ \Gamma \cong \mathbb{P}^1$ con $\Gamma \cdot K_W < 0$

$\Gamma^2 < 0$

Obtenemos una vecindad extremal mk1A/mk2A

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \subseteq & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ P & \to & Y \end{array}$$

Aplicamos Flip/cont div

Regresamos con $W^+ \subseteq \mathcal{W} \to (0 \in \mathbb{D})$

$\Gamma^2 = 0$

$W = \mathbb{P}_B(\mathcal{E})$ y

$W' \rightsquigarrow W'_t = W$

deformación suave de W' geométricamente reglada (Ej: $\mathbb{F}_1 \rightsquigarrow \mathbb{F}_3$)

$\Gamma^2 > 0$

$\rho(W) = 1$ amplio

$-K_W$ amplio

$\Downarrow$

$W \rightsquigarrow W_t = \mathbb{P}^2$

(Hacking–Prokhorov)

$\mathbb{P}^2(a^2, b^2, c^2) \rightsquigarrow W$

donde (Sig página).

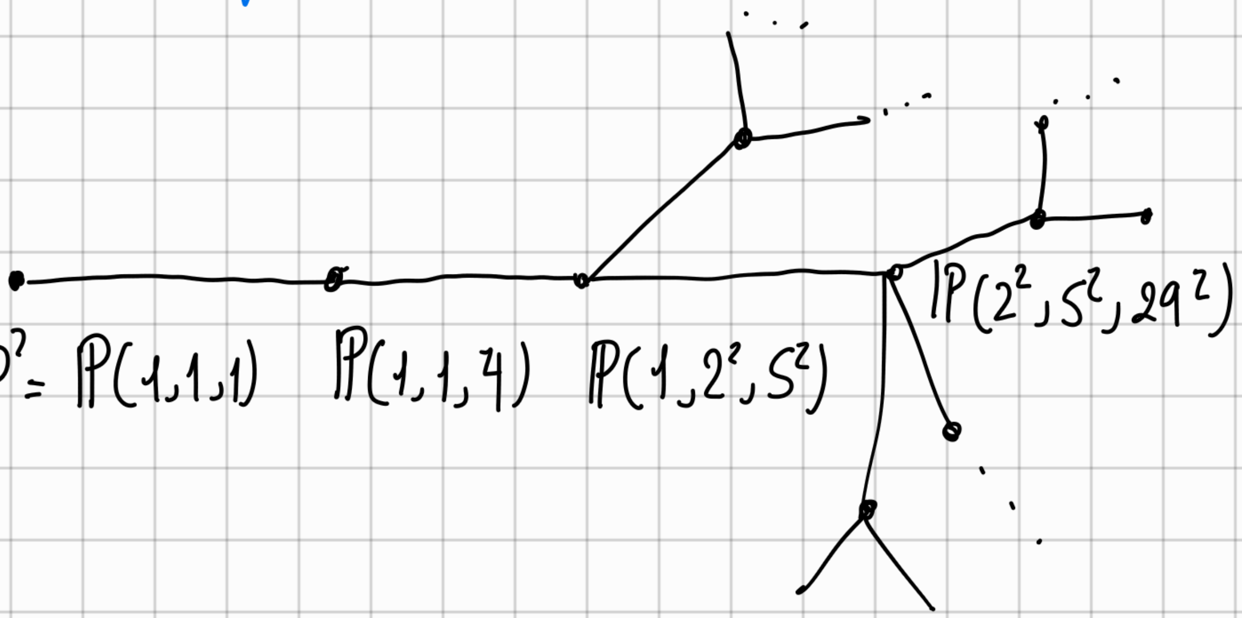
$a^2+b^2+c^2=3abc$ (Ecuación de Markov)

- A partir de la solución minimal $(1,1,1)$ todas las otras se obtienen a través de una mutación

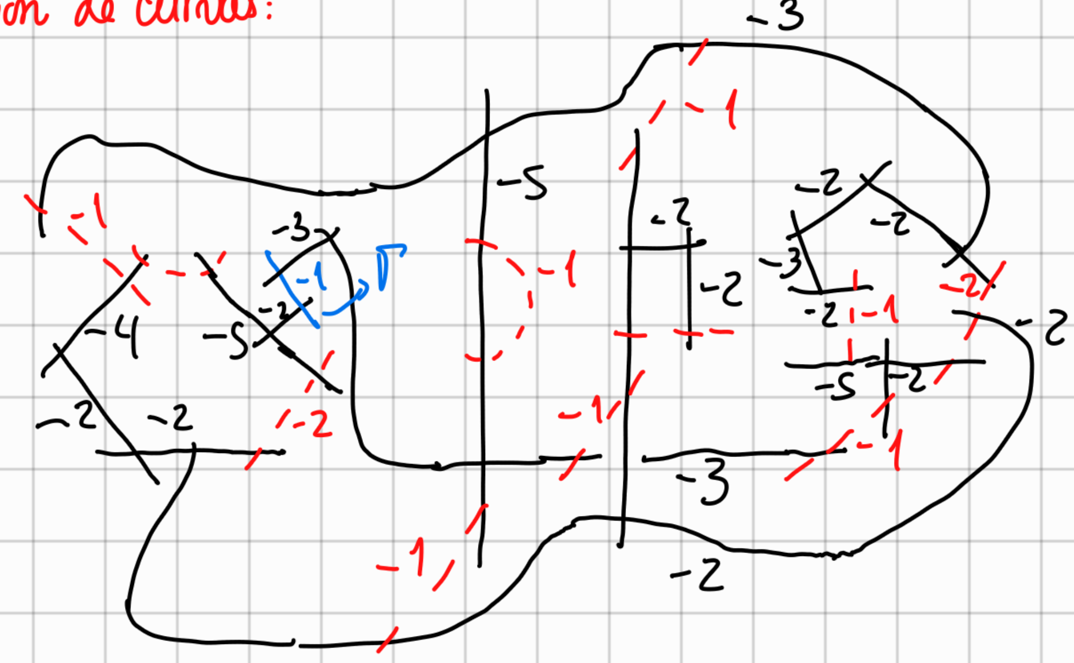
$$(a,b,c)\longmapsto(a,b,3ab-c)$$

$$\mathbb{P}^2 \rightsquigarrow \mathbb{P}^2(a^2,b^2,c^2)$$

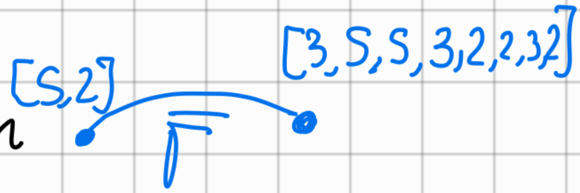
Tenemos el diagrama de sus mutaciones



Ejemplo: En el paper de Park-Park-Shin del 09 tienen la siguiente configuración de curvas:



Esta superficie Z se contrae a una superficie W con obstrucción 0. con $p_g=0$ y $K^2=3$.

Sin embargo, la curva Γ tiene como imagen 

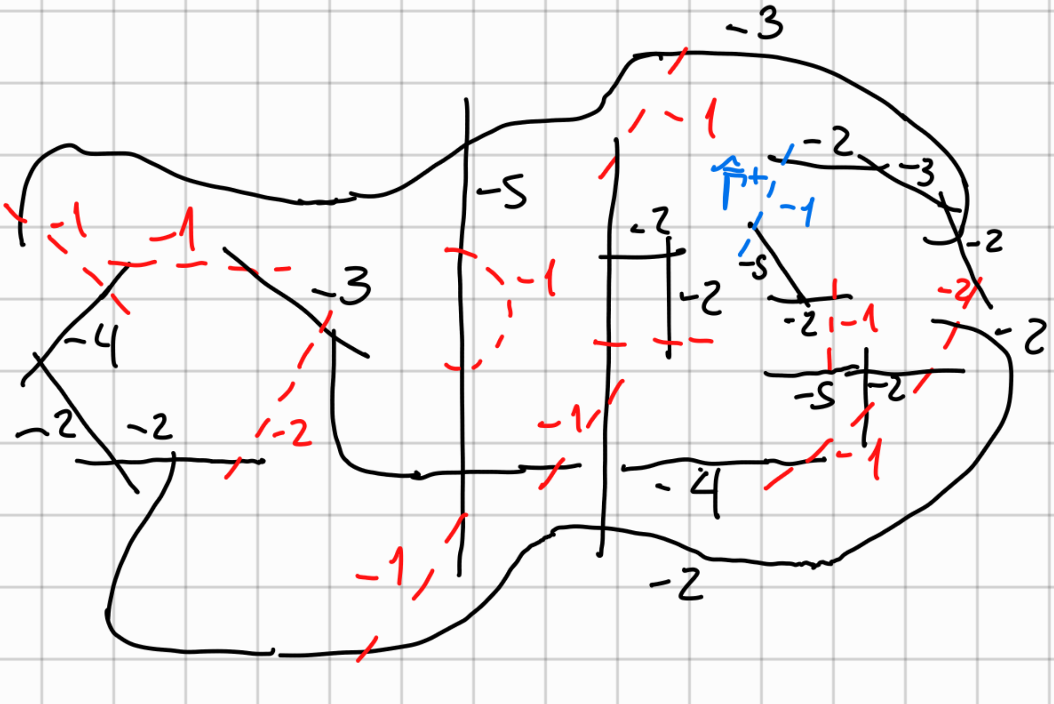
La cual tiene el inconveniente $\bar{\Gamma}\cdot K_W<0$.

* Este caso es una vecindad extremal mk2A que al realizar sus respectivos cálculos, se llega a que esta vecindad es flipping.

Por lo que, al aplicar el flip tenemos:

$$[5,2] \xrightarrow{\bar{\Gamma}} [3,5,5,3,2,2,3,2] \dashrightarrow [3,4,5,3,2,3,2] \xrightarrow{\bar{\Gamma}^+} [3,2].$$

La superficie W^+ posee la resolución minimal



Usando las mismas técnicas de Lee-Park, demostramos que K_{W^+} es nef, $K^2_{W^+}=3$ y por tanto es de tipo general.

• Si W tiene K_W nef, ¿Qué se puede decir sobre los W_t?

Fijamos la dimensión de Kodaira $\mathcal{K}$.

Kawamata
$$\begin{cases} \mathcal{K}=0: & W_t \text{ es superficie de Enriques} \\ \mathcal{K}=1: & W_t \text{ y } W \text{ admiten fibraciones elípticas} \\ & \text{Están clasificadas todas las degeneraciones.} \\ \mathcal{K}=2: & W_t \text{ es de tipo general y hay muchas} \\ & \text{posibilidades} \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} W_t \subseteq W & & \\ \downarrow \quad \downarrow & \xrightarrow{\text{T-sing}} & \\ 0 \in \mathbb{D} & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} W_{can_t} & \subseteq & W_{can} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \in & \mathbb{D} \end{array}$$

y así obtenemos,

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "M\text{-res}"] \arrow[d, squiggly] & W_{can} \arrow[d, squiggly] \\ W_t \arrow[r] & W_{can_t} \end{tikzcd}$$

• Si K_W es big y nef es posible saber que es W?

Sea $X \xrightarrow{\Pi} W$ su resolución minimal y $X \longrightarrow S$ su modelo minimal a través del MMP clásico

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "\text{mod min}"'] \arrow[dr, "\pi"] & & \\
S & & W & W_t \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Se tiene que:

1. S es racional ($\kappa = -\infty$)
2. S es K3 o Enriques ($\kappa = 0$)
3. $\kappa = 1$ y $q(S) = 0$
4. $\kappa = 2$ y $K_S^2 < K_W^2$. $\Rightarrow q(S) = 0$ y por tanto, $q(W) = 0$.