(Ex) Conjetura de Cannon

Conjetura de Cannon, 94 / Open AI, 26

Sea Γ un grupo f.g. tq

i) Γ no tiene torsión

ii) Γ hiperbólico

iii) $\partial\Gamma \approx S^2 \circlearrowright \Gamma$

$\Rightarrow \Gamma = \pi_1 M$ con M 3-variedad hiperbólica cerrada

Prueba: Charla de Mario Bonk en Quasiworld

I| Contexto

- M es **variedad hiperbólica** si $M = \Gamma \backslash \mathbb{H}^n$,

↳ $\mathbb{H}^n$ espacio hiperbólico: $\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+$, $ds^2 = \frac{dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}{x_n^2}$

↳ $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ subgrupo discreto sin torsión

- Γ fin. gen. es **hiperbólico** (sentido de Gromov)

si: en $Cay(\Gamma, S)$ grafo de Cayley con $S \subset \Gamma$ gen. finito,

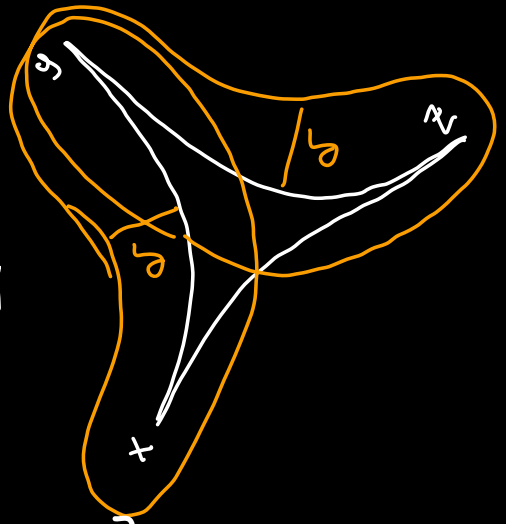
$\exists\, \delta > 0$ tq $\forall\, x, y, z \in Cay(\Gamma, S)$

$[x,z] \subset N_\delta([x,y] \cup [y,z])$

Ejs:

↳ Grupos libres

↳ $\pi_1 M$, M variedad cerrada de curv. neg



- Γ hiperbólico

$$\Gamma \curvearrowright \partial\Gamma = \left\{ \text{rayos geodésicos } \gamma: [0,\infty) \to Cay(\Gamma,S) \right\} / \sim$$

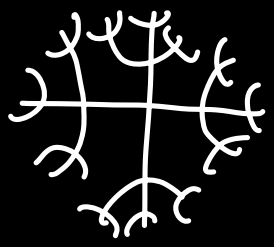
(top. compacto-abierta)

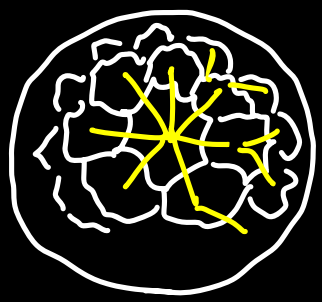
$\gamma(0) = e_\Gamma$

top. cociente. Compacto metrizable!

$$\gamma \sim \gamma' : \quad \sup_{t \geq 0} d(\gamma(t), \gamma'(t)) < \infty$$

Ej: ↳ $\partial F_2 = Cantor$





↳ $\partial \pi_1(M) \approx S^{n-1}$ si: M^n cerrada, curv. neg.

Hechos: Para Γ hiperbólico sin torsión

- $\partial\Gamma \approx Cantor \Rightarrow \Gamma$ libre
- $\partial\Gamma \approx S^1 \Rightarrow \Gamma = \pi_1\Sigma$, Σ superficie hiperbólica

(Gabai '92, Casson-Jungreis '94)

- $\partial\Gamma \approx S^{n-1}$ $n>3$ $\not\Rightarrow$ $\Gamma = \pi_1 M$, M hiperbólica
- $\partial\Gamma \approx S^2$???

Teorema (Bestvina-Mess '97): Γ hiperbólico sin torsión

$\partial\Gamma \approx S^2$ ssi Γ es PD_3 ← dualidad de Poincaré

Obs: $\exists\ \Gamma$ f.p. presentado y PD_4 que no es π_1 de una 4-variedad asférica (Open AI, 26)

Teorema (Hiperbolización / Perelman): M 3-variedad cerrada orientable. M posee métrica hiperbólica ssi

1) $\pi_1 M$ no es un producto libre,
2) $\mathbb{Z}^2 \not\leq \pi_1 M$, $\pi_1 M \neq \mathbb{Z}$

Cannon implica: Si M 3-variedad cerrada de curvatura negativa $\Rightarrow$ posee métrica hiperbólica

---

II Intentos humanos

Camino 1 (Métrico): sin torsión — esfera conforme

Teorema (Tukia '94): Γ hiperbólico y con $\partial\Gamma \underset{bH}{\approx} \mathbb{S}^{n-1}$

$\Rightarrow \Gamma = \pi_1(n\text{-var. hip.})$

$\underset{bH}{\approx}$: Para ρ_v métrica visual en $\partial\Gamma$, $\exists\ f: \partial\Gamma \to \mathbb{S}^{n-1}$ bi-Hölder

$$C^{-1}\rho_v^{\beta} \leq d_{\mathbb{S}^{n-1}} \leq C\rho_v^{\alpha}$$

$\therefore$ hay que mirar estructura métrica de $(\partial\Gamma, \rho)$

poca estructura!

Teorema (Bonk-Kleiner '05): Γ hip. + $\partial\Gamma \approx S^2$

Si: $\exists\, \rho$ métrica en $\partial\Gamma$ tq

- ρ quasisimétrica a ρ_V
- ρ Ahlfors regular de dim 2 ($\mathrm{vol}(B_{\rho}(a,r)) \asymp r^2$)

$\Big\}$ ⊗

$\Rightarrow$ $\Gamma = \pi_1 M$ M 3-var. hip.

↳ ⊗ $\Rightarrow$ Hay muchas curvas rectificables

↳ $\Rightarrow$ Hay noción de "derivadas direccionales"

↳ Se puede seguir prueba de Tukia

Camino 2 (Cúbico):

Teorema (Markovic '13, Haissinsky '15)

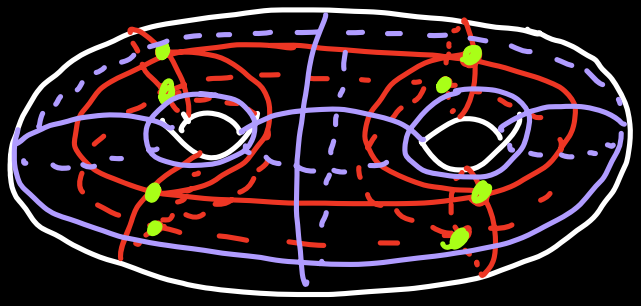
Γ sin torsión + hiperbólico + $\partial\Gamma \approx S^2$

Si: Γ cubulable $\Rightarrow$ $\Gamma = \pi_1$(3-variedad hiperbólica)

difícil de verificar

- Γ **cubulable**: $\Gamma = \pi_1 \mathcal{X}$, $\mathcal{X}$ complejo cúbico de curvatura no positiva

Ej:



es c.cúbico NPC

Teorema (Kahn-Markovic'12, Bergeron-Wise'12): M 3-var. cerrada hiperbólica $\Rightarrow$ $\pi_1 M$ cubulable

↳ $\pi_1 M$ posee muchos subgrupos de superficie

↳ Cubulación es "dual" a estos subgrupos

Prueba de $M, H : \hookrightarrow \Gamma$ cubulable + hiperbólico + $\partial\Gamma \approx S^2$

$\Rightarrow$ Γ posee muchos subgrupos de superficie

↳ Agol $\Rightarrow$ estos subgrupos proviene de superficies "encajadas" en cubrientes finitos

$\pi_1 \Sigma = H < \Gamma = \pi_1 \mathcal{X} \Rightarrow \Sigma \hookrightarrow \hat{\mathcal{X}} \xrightarrow{\text{finito}} \mathcal{X}$

↳ $\Gamma \curvearrowright S^2 \Rightarrow \Gamma \curvearrowright \overline{\mathbb{B}^3}$ (extensión radial, fija 0)

↳ Usar superficies para mejorar acción en subgrupo de índice finito, $\hat{\Gamma} \curvearrowright \overline{\mathbb{B}^3}$, propiamente discontinua en interior $\therefore$ $\hat{\Gamma} \backslash \mathbb{B}^3$ es 3-variedad Haken

↳ Usar topología de 3-variedades (Scott, Thurston, Tukia)