Automorfismos de superficies con $K^2 = p_g = 1$

Parte 1: Contexto y la cota $|\operatorname{Aut}(S)| \leq 72$

Seminario de Geometría Algebraica (PUC, 2026-2), Pedro Montero (UTFSM)

Basado en [DLM]: J. Duque Franco, A. Liendo y P. Montero, *Automorphisms and Hodge isometries of surfaces with $K^2 = p_g = 1$*. Trabajamos sobre $\mathbf{C}$, y $\mu_n \subset \mathbf{C}^\times$ es el grupo de raíces n-ésimas de 1.

1. Curvas: la cota de Hurwitz

Teorema (Hurwitz [Hur93]): Sea C una curva proyectiva lisa de género $g \geq 2$. Entonces $\operatorname{Aut}(C)$ es finito y $|\operatorname{Aut}(C)| \leq 84(g-1)$.

Idea de la prueba: Sea $G \subseteq \operatorname{Aut}(C)$ finito, $\pi\colon C \to C' = C/G$ y g' el género de C'. Si $p_1, \ldots, p_r \in C'$ son los puntos de rama y m_i es el orden del estabilizador de un punto sobre p_i, Riemann–Hurwitz da

$$2g - 2 = |G| \cdot \delta, \qquad \delta = 2g' - 2 + \sum_{i=1}^{r} \Big(1 - \frac{1}{m_i}\Big) > 0.$$

Si $g' \geq 1$, o si $g' = 0$ y $r \geq 5$, entonces $\delta \geq \frac{1}{2}$; si $g' = 0$ y $r = 4$, entonces $\delta \geq \frac{1}{6}$; si $g' = 0$ y $r = 3$, entonces $\delta = 1 - \sum \frac{1}{m_i} \geq 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$, con igualdad sólo para $(2, 3, 7)$. Luego $|G| = \frac{2g-2}{\delta} \leq 84(g-1)$.

Ejemplo: La cuártica de Klein $\{x^3y + y^3z + z^3x = 0\} \subset \mathbf{P}^2$ tiene $g = 3$ y grupo de automorfismos $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$, de orden $168 = 84 \cdot 2$ [Kle78].

2. Superficies: la cota de Xiao

Si S es una superficie minimal de tipo general, $\operatorname{Aut}(S)$ es finito y se tiene[1]

Teorema (Xiao [Xia94, Xia95]): $|\operatorname{Aut}(S)| \leq 42^2 K_S^2$.

Ejemplo: Sea C con $|\operatorname{Aut}(C)| = 84(g-1)$, $G_0 = \operatorname{Aut}(C)$, $S = C \times C$ y $G = (G_0 \times G_0) \rtimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, con $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ intercambiando los factores. Entonces

$$|G| = 2 \cdot 84^2 (g-1)^2, \qquad K_S^2 = 2(2g-2)^2 = 8(g-1)^2, \qquad |G| = 42^2 K_S^2.$$

Desigualdad de Noether: $K_S^2 \geq 2p_g(S) - 4$ [BHPV04, Thm. VII.3.1]. Luego $K_S^2 = 1$ implica $p_g \leq 2$. Si $p_g = 2$, el modelo canónico es una hipersuperficie de grado 10 en $\mathbf{P}(1, 1, 2, 5)$ y $|\operatorname{Aut}(S)| \leq 200$ [Wen21, Zha26]. El caso $p_g = 1$ fue estudiado por Catanese [Cat79, Cat80] y es el de estas sesiones. Las superficies con $K^2 = 1$, $p_g = 0$ son las superficies de Godeaux numéricas.

Motivación (Torelli): La aplicación de períodos de las superficies con $K^2 = p_g = 1$ tiene grado al menos 2 [Cat80, Thm. 3.3]. Para superficies K3, el teorema de Torelli fuerte [PSS71, BR75] identifica $\operatorname{Aut}(X)$ con las isometrías de $H^2(X, \mathbf{Z})$ que preservan la estructura de Hodge y el cono amplio. La comparación análoga para las superficies con $|\operatorname{Aut}| = 72$ es lo que discutiremos en la Parte 2.

3. Superficies con $K^2 = p_g = 1$

Sea S minimal de tipo general con $K_S^2 = p_g(S) = 1$ y $X = \operatorname{Proj} R(S, K_S)$ su modelo canónico, donde $R(S, K_S) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(S, nK_S)$. Recordemos que X es normal con a lo más puntos dobles racionales, que $S \to X$ es la resolución minimal y que $\operatorname{Aut}(S) = \operatorname{Aut}(X)$.

Teorema (Catanese [Cat80]):

[1] Ver también *On the birational automorphisms of varieties of general type* por C. D. Hacon, J. McKernan y C. Xu.

(1) $q(S) = 0$, S es simplemente conexa y $h^0(nK_S) = \frac{n(n-1)}{2} + 2$ para $n \geq 2$.

(2) $R(S, K_S)$ está generado por x_0, x_1, x_2, z_3, z_4, de grados $1, 2, 2, 3, 3$, con dos relaciones f, g de grado 6. Luego $X = V(f, g) \subset \mathbf{P}(1, 2, 2, 3, 3)$, contenida en el lugar liso de $\mathbf{P}(1, 2, 2, 3, 3)$. Recíprocamente, una tal intersección completa con a lo más puntos dobles racionales es un modelo canónico con $K^2 = p_g = 1$.

(3) (Forma normal) $f = z_3^2 + x_0 z_4\, a(y) + F(y)$, $g = z_4^2 + x_0 z_3\, b(y) + G(y)$, donde $y = (y_0, y_1, y_2) = (x_0^2, x_1, x_2)$, a, b son lineales y F, G cúbicas en y, y $C = F(0, y_1, y_2)$, $D = G(0, y_1, y_2)$ son no nulas y coprimas.

(4) Los isomorfismos entre superficies en forma normal son inducidos por $x_0 \mapsto \lambda x_0$, $y_i \mapsto \sum_j d_{ij} y_j$ $(i = 1, 2)$, junto con $z_3 \mapsto \mu z_3$, $z_4 \mapsto \nu z_4$, o bien $z_3 \mapsto \mu z_4$, $z_4 \mapsto \nu z_3$.

Observaciones:

- $\mathrm{Sing}(\mathbf{P}(1, 2, 2, 3, 3)) = \Sigma_2 \sqcup \Sigma_3$, con $\Sigma_2 = \{x_0 = z_3 = z_4 = 0\}$ (estabilizador μ_2) y $\Sigma_3 = \{x_0 = x_1 = x_2 = 0\}$ (estabilizador μ_3). Aquí $X \cap \Sigma_3 = \emptyset$, y $X \cap \Sigma_2 = \{C = D = 0\} = \emptyset$.
- Adjunción: $K_X = \mathcal{O}_X(6 + 6 - 1 - 2 - 2 - 3 - 3) = \mathcal{O}_X(1)$ y $K_X^2 = \frac{6 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = 1$.
- Si $a = b = 0$, el grupo $\{z_3 \mapsto \pm z_3,\ z_4 \mapsto \pm z_4\} \simeq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$ actúa en X y $X \to \mathbf{P}^2$, $x \mapsto y$, es un cubrimiento bidoble ramificado en $\{F = 0\}$, $\{G = 0\}$ y $\{y_0 = 0\}$ [Cat80, Prop. 2.2].

4. La cota $|\operatorname{Aut}(X)| \leq 72$

Para una forma H en y y $A \in \mathrm{GL}_2$ escribimos $H \circ A$ para $y \mapsto H(y_0, A(y_1, y_2))$.

Proposición [DLM, §1]: Tras un cambio de coordenadas que preserva la forma normal, $\operatorname{Aut}(X)$ consiste de los automorfismos de *primera especie*

$$x_0 \mapsto x_0, \qquad (y_1, y_2) \mapsto A(y_1, y_2), \qquad z_3 \mapsto \mu z_3, \qquad z_4 \mapsto \nu z_4,$$

con $A \in \mathrm{GL}_2$ y $\mu, \nu \in \mathbf{C}^\times$ tales que $F \circ A = \mu^2 F$, $G \circ A = \nu^2 G$, $\nu\,(a \circ A) = \mu^2 a$, $\mu\,(b \circ A) = \nu^2 b$, y de los de *segunda especie*: $z_3 \mapsto \mu z_4$, $z_4 \mapsto \nu z_3$, con $F \circ A = \mu^2 G$, $G \circ A = \nu^2 F$, $\nu\,(a \circ A) = \mu^2 b$, $\mu\,(b \circ A) = \nu^2 a$.

Idea de la prueba: Por (4), cada automorfismo actúa en y por una matriz del parabólico $P = (\mathbf{C}^\times \times \mathrm{GL}_2) \ltimes U_1$, con $U_1 = \{y_i \mapsto y_i + c_i y_0\}$ unipotente. El grupo de automorfismos graduados que preservan (f, g) es extensión del grupo finito $\operatorname{Aut}(X)$ por el toro $\{(t, t^2, t^2, t^3, t^3)\}$, luego es reductivo. Teorema de Mostow [Mos56]: en un grupo algebraico lineal $L \ltimes U$, con U unipotente y L reductivo, todo subgrupo reductivo es conjugado a un subgrupo de L. Así, tras un cambio $x_i \mapsto x_i + c_i x_0^2$ (que preserva la forma normal), $\operatorname{Aut}(X)$ queda en $\mathbf{C}^\times \times \mathrm{GL}_2$. Con el toro se normaliza $x_0 \mapsto x_0$, y las condiciones salen de $\varphi^* f = \mu^2 f$, $\varphi^* g = \nu^2 g$.

Sucesiones exactas: Sea $B \subseteq \mathrm{GL}_2$ la imagen de $\varphi \mapsto A$, V su núcleo y $T \subseteq \mathrm{PGL}_2$ la imagen de B. Entonces

$$1 \to V \to \operatorname{Aut}(X) \to B \to 1, \qquad 1 \to B \cap \mathbf{C}^\times \to B \to T \to 1, \qquad |\operatorname{Aut}(X)| = |V| \cdot |B \cap \mathbf{C}^\times| \cdot |T|.$$

T actúa en $\mathbf{P}^1 = \{(y_1 : y_2)\}$, y $T_1 \subseteq T$ es la imagen de los elementos de primera especie. Decimos que X es de *tipo degenerado* si C y D son ambos cubos de formas lineales.

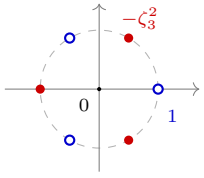
Lema [DLM, §§1–2]:

(1) $|V| \leq 4$, con igualdad si y sólo si $a = b = 0$.

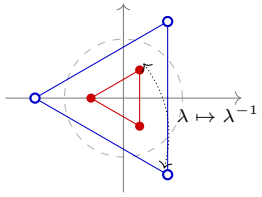
(2) $|B \cap \mathbf{C}^\times| \leq 3$.

(3) Si X no es de tipo degenerado, entonces $[T : T_1] \leq 2$ y $|T_1| \leq 6$. Si $|T_1| = 6$, tras un cambio proyectivo de la coordenada $\lambda = y_1/y_2$, las raíces de C y de D son las dos órbitas de tamaño 3 del grupo diedral $\Delta \simeq \mathfrak{S}_3$ generado por $\lambda \mapsto \zeta_3\lambda$ y $\lambda \mapsto \lambda^{-1}$: $\{1, \zeta_3, \zeta_3^2\}$ y $\{-1, -\zeta_3, -\zeta_3^2\}$.

Idea de la prueba: (1) Si $A = \mathrm{Id}$, entonces $\mu, \nu \in \{\pm 1\}$; si $a \neq 0$ se tiene $\nu = 1$, y si $b \neq 0$, $\mu = 1$. (2) Si $A = t\,\mathrm{Id}$ (necesariamente de primera especie), de $t^3C = \mu^2 C$ y $t^3D = \nu^2 D$ sale $\mu^2 = \nu^2 = t^3$. Si F o G contiene y_0^3, entonces $t^3 = 1$. Si no, $(1 : 0 : 0 : 0 : 0) \in X$, y que este punto sea a lo más un punto doble racional da $t^2 = 1$ o $t^3 = 1$. (3) Los elementos de primera especie preservan el conjunto de raíces de C y el de D, que son disjuntos, y los de segunda especie los intercambian. Si C tiene tres raíces distintas, $T_1 \hookrightarrow \mathfrak{S}_3$. En los demás casos T_1 fija uno o dos puntos y $|T_1| \leq 3$, pues un elemento de PGL_2 que fija tres puntos es la identidad.



(a) $C = y_1^3 + y_2^3$ (•), $D = y_1^3 - y_2^3$ (∘)



(b) Y_r: $C = y_1^3 + ry_2^3$, $D = ry_1^3 + y_2^3$ $(r > 0)$

Teorema [DLM, §2]: $|\operatorname{Aut}(X)| \leq 72$. Si hay igualdad, X no es de tipo degenerado, $a = b = 0$, $|V| = 4$, $|B \cap \mathbf{C}^\times| = 3$ y $|T| = 6$.

Idea de la prueba: Fuera del tipo degenerado se acota $|V| \cdot |B \cap \mathbf{C}^\times| \cdot |T|$ en cada caso:

- $|B \cap \mathbf{C}^\times| = 3$ y $a = b = 0$: se tiene $|T| \leq 6$, luego $|\operatorname{Aut}(X)| \leq 4 \cdot 3 \cdot 6 = 72$;
- $|B \cap \mathbf{C}^\times| = 3$ y exactamente uno de a, b nulo: no hay elementos de segunda especie, y $|\operatorname{Aut}(X)| \leq 2 \cdot 3 \cdot 6 = 36$;
- $|B \cap \mathbf{C}^\times| = 3$ y $a \neq 0 \neq b$: $V = 1$ y $|\operatorname{Aut}(X)| \leq 1 \cdot 3 \cdot 12 = 36$;
- $|B \cap \mathbf{C}^\times| = 2$: T_1 es cíclico y $|\operatorname{Aut}(X)| \leq 4 \cdot 2 \cdot 6 = 48$; $\quad |B \cap \mathbf{C}^\times| = 1$: $|\operatorname{Aut}(X)| \leq 4 \cdot 1 \cdot 12 = 48$.

En el primer caso, $|B \cap \mathbf{C}^\times| = 3$ fuerza $F = c_0 y_0^3 + C$ y $G = d_0 y_0^3 + D$, y si $|T_1| = 6$ un elemento de segunda especie impediría que T_1 contenga reflexiones; luego $T = T_1$.

Tipo degenerado ($C = y_1^3$, $D = y_2^3$)**:** las raíces son sólo $0, \infty$ y no acotan T. Los elementos de primera especie tienen $A = \operatorname{diag}(s, u)$, y cada monomio de las ecuaciones impone una condición $s^p u^q = 1$. Por ejemplo, y_1^3 da $s^3 = \mu^2$, luego un monomio $y_0^i y_1^j y_2^k$ de F con $i \geq 1$ da $s^{j-3} u^k = 1$; análogamente para G, a y b. Si $\Gamma \subseteq \mathbf{Z}^2$ es el retículo generado por los exponentes (p, q) y B_1 la imagen de los elementos de primera especie,

$$B_1 \subseteq \{(s, u) \in (\mathbf{C}^\times)^2 : \ s^p u^q = 1 \ \ \forall\, (p, q) \in \Gamma\} \simeq \operatorname{Hom}(\mathbf{Z}^2/\Gamma, \mathbf{C}^\times),$$

de orden $[\mathbf{Z}^2 : \Gamma]$, que divide $|pq' - qp'|$ para dos vectores independientes cualesquiera de Γ.

Proposición [DLM, §2]: En el tipo degenerado $|\operatorname{Aut}(X)| \leq 64$. El único caso que daría 72 es $a = b = 0$ y $\Gamma = 3\mathbf{Z} \times 3\mathbf{Z}$, es decir $F = c_0 y_0^3 + y_1^3$ y $G = d_0 y_0^3 + y_2^3$, que tras reescalar es

$$X_0 : \quad z_3^2 + x_0^6 + x_1^3 = z_4^2 + x_0^6 + x_2^3 = 0,$$

y X_0 no es un modelo canónico (ver §5).

5. Las superficies extremales y la superficie X_0

Teorema A [DLM]: Sea S minimal de tipo general con $K_S^2 = p_g(S) = 1$. Entonces $|\operatorname{Aut}(S)| \leq 72$, y hay igualdad si y sólo si S es la resolución minimal de una de

$$\begin{aligned} X_{2D_4}\colon &\quad z_3^2 + x_0^6 + x_1^3 + x_2^3 = z_4^2 + x_1^3 - x_2^3 = 0,\\ X_{3A_2}\colon &\quad z_3^2 + x_0^6 + x_1^3 - x_2^3 = z_4^2 + x_0^6 + x_1^3 + x_2^3 = 0,\\ X_r\colon &\quad z_3^2 + r x_0^6 + x_1^3 - r^2 x_2^3 = z_4^2 + x_0^6 + x_1^3 - x_2^3 = 0, \qquad r \in \mathbf{C}^\times \smallsetminus \{\pm 1\}. \end{aligned}$$

X_{2D_4} tiene dos puntos D_4 y $\operatorname{Aut}(X_{2D_4}) \simeq ((\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^2 \rtimes \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$; X_{3A_2} tiene tres puntos A_2 y $\operatorname{Aut}(X_{3A_2}) \simeq (\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^2 \times \mathbf{D}_4$; cada X_r es lisa y $\operatorname{Aut}(X_r) \simeq (\mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}) \rtimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Los únicos isomorfismos entre ellas son $X_r \simeq X_{1/r}$.

Observación: En X_{2D_4} y X_{3A_2} las raíces de C y D forman el hexágono de la figura (a). Para X_r, con $\theta^6 = r$, sustituir $(x_0, x_1, x_2, z_3, z_4)$ por $(\theta^{-1}x_0, x_1, -\theta^{-2}x_2, z_3, \theta^{-3}z_4)$ (y multiplicar la segunda ecuación por r) da

$$X_r \simeq Y_r\colon \quad z_3^2 + x_0^6 + x_1^3 + r\,x_2^3 = z_4^2 + x_0^6 + r\,x_1^3 + x_2^3 = 0,$$

con $\operatorname{Aut}(Y_r) = \langle \tau_1, \tau_2 \rangle \rtimes \langle \iota \rangle$, donde

$$\tau_1 = (x_0, \zeta_3 x_1, x_2, -z_3, z_4), \qquad \tau_2 = (x_0, x_1, \zeta_3 x_2, z_3, -z_4), \qquad \iota\colon\ x_1 \leftrightarrow x_2,\ z_3 \leftrightarrow z_4.$$

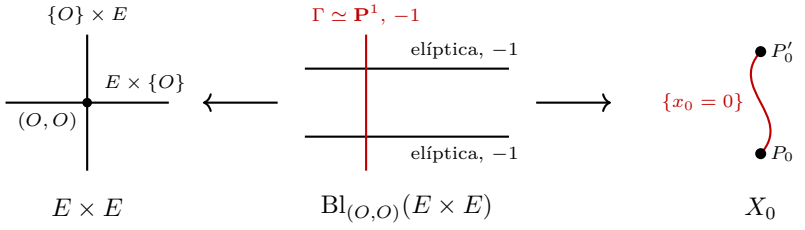
Las raíces de C y D forman dos triángulos intercambiados por $\lambda \mapsto \lambda^{-1}$ (figura (b)). Cuando $r \to 0$ colapsan a 0 y a ∞, y $Y_0 = X_0$ es de tipo degenerado.

Lema (ver [DLM, §2]): X_0 es singular exactamente en $P_0 = (0:0:1:0:\sqrt{-1})$ y $P_0' = (0:1:0:\sqrt{-1}:0)$, con modelo local $z_3^2 + x_1^3 + x_0^6 = 0$ en P_0 (análogamente en P_0'). En particular X_0 no es un modelo canónico.

Observación: Sea $E = \{z^2 + x_0^6 + x^3 = 0\} \subset \mathbf{P}(1,2,3)$, la curva elíptica con $j = 0$, con origen $O = (0:-1:1)$. La aplicación

$$\psi\colon X_0 \dashrightarrow E \times E, \qquad (x_0 : x_1 : x_2 : z_3 : z_4) \mapsto \big((x_0 : x_1 : z_3), (x_0 : x_2 : z_4)\big)$$

es un isomorfismo de $X_0 \cap \{x_0 \neq 0\}$ sobre $(E \smallsetminus O)^2$, contrae $X_0 \cap \{x_0 = 0\}$ al punto (O, O) y reemplaza P_0, P_0' por $E \times \{O\}$, $\{O\} \times E$. La resolución minimal de X_0 es $\operatorname{Bl}_{(O,O)}(E \times E)$, con curvas excepcionales las transformadas estrictas de $E \times \{O\}$ y $\{O\} \times E$.



Referencias

[BHPV04] W. Barth, K. Hulek, C. Peters, A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*, 2a ed., Ergeb. Math. Grenzgeb. (3) 4, Springer, 2004.

[BR75] D. Burns, M. Rapoport, *On the Torelli problem for kählerian K3 surfaces*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 8 (1975), 235–273.

[Cat79] F. Catanese, *Surfaces with $K^2 = p_g = 1$ and their period mapping*, Lecture Notes in Math. 732, Springer, 1979, 1–29.

[Cat80] F. Catanese, *The moduli and the global period mapping of surfaces with $K^2 = p_g = 1$: a counterexample to the global Torelli problem*, Compositio Math. 41 (1980), 401–414.

[DLM] J. Duque Franco, A. Liendo, P. Montero, *Automorphisms and Hodge isometries of surfaces with $K^2 = p_g = 1$*, sometido.

[Hur93] A. Hurwitz, *Über algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich*, Math. Ann. 41 (1893), 403–442.

[Kle78] F. Klein, *Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen*, Math. Ann. 14 (1878), 428–471.

[Mos56] G. D. Mostow, *Fully reducible subgroups of algebraic groups*, Amer. J. Math. 78 (1956), 200–221.

[PSS71] I. I. Pyatetskii-Shapiro, I. R. Shafarevich, *A Torelli theorem for algebraic surfaces of type K3*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 35 (1971), 530–572.

[Wen21] D. Wen, *Automorphisms of minimal surfaces of general type with $K^2 = 1$ and $p_g = 2$*, arXiv:2101.10656.

[Xia94] G. Xiao, *Bound of automorphisms of surfaces of general type. I*, Ann. of Math. (2) 139 (1994), 51–77.

[Xia95] G. Xiao, *Bound of automorphisms of surfaces of general type. II*, J. Algebraic Geom. 4 (1995), 701–793.

[Zha26] H. Zhao, *On automorphism groups of $(1, 2)$-surfaces*, arXiv:2606.25554.