SGA 2020-2 (Semana 1): "Introducción a los orbifolds"

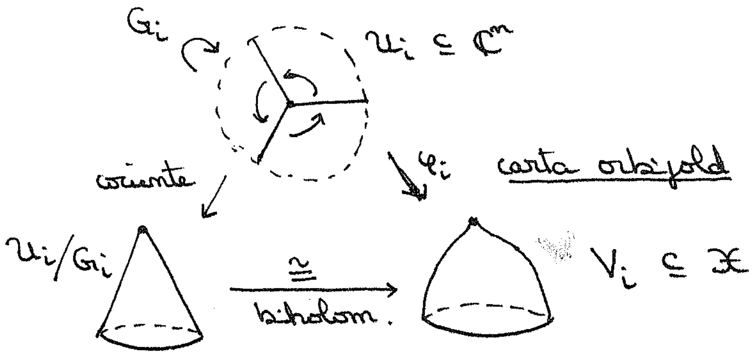
1) **Un poco de historia:** La noción de orbifold fue introducida por Satake (1956) bajo el nombre de "V-manifold", y luego fue extendida por Matsusaka (1964) al contexto de variedades algebraicas ⇝ "$\mathbb{Q}$-variety" (cf. Deligne - Mumford). En 1979, Thurston redescubre el concepto de V-manifold bajo el nombre de orbifold:

Idea: Variedad compleja: "localmente un abierto de $\mathbb{C}^n$"

⇝ Orbifold complejo: "localmente el cociente de un abierto de $\mathbb{C}^n$ por un grupo finito" (recordamos el grupo!)

Def: Un orbifold $\mathcal{X}$ de dimensión n es un espacio analítico complejo (ie, localmente dado por ceros de finitas funciones holomorfas), compacto y normal tal que:

$\exists\ \mathcal{X} = \bigcup_{i \in I} V_i$ cubrimiento abierto, donde para cada $V_i \subseteq \mathcal{X}$ hay un abierto $\mathcal{U}_i \subseteq \mathbb{C}^n$ y un grupo finito $G_i \curvearrowright \mathcal{U}_i$ actuando (efectivamente) por biholomorfismos tal que $V_i \underset{\text{bihol.}}{\cong} \mathcal{U}_i / G_i$.



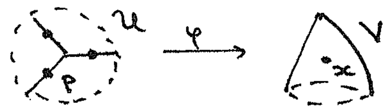
Atlas orbifold: La condición de pegado es la siguiente:

Si $V_i \subseteq V_j$ son abiertos de $\mathcal{X}$ con $V_i \cong \mathcal{U}_i/G_i$ y $V_j \cong \mathcal{U}_j/G_j$

$\Rightarrow \exists$ morfismo de grupos $f_{ij} : G_i \hookrightarrow G_j$ inyectivo y una inclusión $\psi_{ij} : \mathcal{U}_i \hookrightarrow \mathcal{U}_j$ equivariante resp. a la acción de G_i en $\mathcal{U}_i$ y de G_i en $\mathcal{U}_j$ vía $G_i \hookrightarrow G_j$, ie, $\psi_{ij}(g \cdot x) = f_{ij}(g) \cdot \psi_{ij}(x)$ $\forall x \in \mathcal{U}_i$, $\forall g \in G_i$.

⚠ Las inclusiones no son necesariamente únicas "arriba" por lo que no podemos esperar pegarlas (condición de cociclo). En otras palabras, $\mathcal{X}$ no es necesariamente un cociente global por un grupo finito.

Obs: Sea $x \in \mathcal{X}$ un punto y sea $V \subseteq \mathcal{X}$ una carta orbifold en torno a x, ie, $x \in V$ y $V \cong \mathcal{U}/G$ con $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}^n$:



Sea $p \in \varphi^{-1}(x)$. Entonces, módulo conjugación, el grupo de isotropía $G_p = \{g \in G \text{ tq } g \cdot p = p\}$ depende <u>sólo</u> de $x \in \mathcal{X}$, y será denotado G_x.

Diremos que $|G_x| =: \mathrm{ord}(x)$ es el <u>orden</u> del punto $x \in \mathcal{X}$. Más aún, el orden del orbifold (compacto❗) $\mathcal{X}$, $\mathrm{ord}(\mathcal{X})$, es el $\mathrm{mcm}_{x \in \mathcal{X}} \{\mathrm{ord}(x)\}$.

<u>Def</u>: Sea $\mathcal{X}$ un orbifold. Diremos que un punto $x \in \mathcal{X}$ es:

① <u>orbifold singular</u> si $G_x \neq \{e\}$, ie, $\mathrm{ord}(x) > 1$.

② <u>orbifold regular</u> si $G_x = \{e\}$, ie, $\mathrm{ord}(x) = 1$.

Denotamos por $\mathrm{Sing}^{orb}(\mathcal{X})$ (resp. $\mathcal{X}^{orb}_{reg}$) el conjunto de puntos orbifold singulares (resp. regulares) de $\mathcal{X}$. * "locus orbifold".

⚠ Si pensamos $\mathcal{X}$ como una variedad con singularidades cocientes, entonces $\mathcal{X}^{orb}_{reg} \subseteq \mathcal{X}_{reg}$ y $\mathrm{Sing}(\mathcal{X}) \subseteq \mathrm{Sing}^{orb}(\mathcal{X})$ son inclusiones estrictas en general:

Si el grupo G_i actúa <u>linealmente</u> en $\mathcal{U}_i \subseteq \mathbb{C}^n$, ie, $G_i \subseteq GL_n(\mathbb{C})$ entonces decimos que un elemento $g \in G_i$ es una (pseudo)-<u>reflexión</u> si $\lambda = 1$ es un valor propio de multiplicidad $n-1$ (ie, $g \sim \mathrm{diag}(\zeta, 1, \ldots, 1)$, $\zeta \neq 1$ raíz de la unidad). Más aún, decimos que G_i es un <u>grupo de reflexiones</u> (resp. <u>grupo pequeño</u>) si está generado por reflexiones (resp. <u>no</u> contiene reflexiones).

<u>Teorema</u> (Chevalley - Shephard - Todd, 1954): Sea $G \subseteq GL_n(\mathbb{C})$ subgrupo finito. Entonces:

① $\mathbb{C}^n / G$ suave $\iff$ G es un grupo de reflexiones.

② Existe un grupo pequeño G' tal que $\mathbb{C}^n / G \underset{\text{holo}}{\cong} \mathbb{C}^n / G'$.

<u>Obs</u>: Si $n = 1$, todo subgrupo finito $G \subseteq \mathbb{C}^*$ es cíclico $\Rightarrow G \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. En part, G es un grupo de reflexiones y $\mathbb{C}/G$ es suave como variedad cociente, pero <u>no</u> como orbifold.

<u>Terminología</u>: Un orbifold <u>clásico</u> (o "<u>bien formado</u>") son aquellos para los cuales el conjunto de puntos fijos de cada elemento no-trivial de G_i tiene codimensión ≥ 2, para todo i (cf. grupos pequeños).

$\rightsquigarrow$ Nosotros nos interesaremos en <u>todos</u> los orbifolds (no sólo clásicos)❗

<u>Ejemplo</u>: Sup. que todos los estabilizadores $G_x \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ $(m \geq 1)$ son cíclicos.

Localmente (top. euclideana) cerca de p, la carta orbifold $\varphi : \mathcal{U} \to V \cong \mathcal{U}/(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ está dada por

$$(z_1, \ldots, z_n) \longmapsto (z_1^{a_1}, z_2^{a_2}, \ldots, z_k^{a_k}, z_{k+1}, \ldots, z_n)$$

para ciertos $a_i \geq 1$ enteros positivos tq $a_i \mid m$ (cf. §2.2. "Toric varieties" (Fulton)).
Decimos que $x \in \mathcal{X}$ es un punto orbifold de tipo $\frac{1}{m}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ si $\zeta \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ actúa como $\zeta \cdot (z_1, \ldots, z_k) = (\zeta^{\lambda_1} z_1, \ldots, \zeta^{\lambda_k} z_k)$, donde λ_i es un múltiplo de m/a_i.

② <u>Descripción global de un orbifold</u>:

Notamos que si $\mathcal{X}$ es un orbifold clásico (ie, codim de conjuntos de puntos fijos ≥ 2) entonces $\mathcal{X} = \bigcup_{i \in I} (V_i; \mathcal{U}_i, G_i)$ está determinado por la variedad con singularidades cociente $X = \bigcup_{i \in I} V_i$ ("coarse moduli space").

Hay que ser más cuidadosos si hay conjuntos de puntos fijos de codimensión 1 (ie, divisores):

En tal caso, las cartas orbifold $\varphi_i : \mathcal{U}_i \longrightarrow V_i$ poseen divisores de ramificación $D_{ij} \subseteq V_i$ ("branch divisor") y $R_{ij} \subseteq \mathcal{U}_i$ ("ramification divisor"): si denotamos por m_{ij} el índice de ramificación sobre D_{ij}, entonces localmente en torno a un punto general de R_{ij} la carta φ_i luce como:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \xmapsto{\varphi_i} (z_1 = x_1^{m_{ij}}, z_2 = x_2, \ldots, z_n = x_n)$$

Notar que $\varphi_i^*(dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n) = m_{ij}\, x_1^{m_{ij}-1} \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, por lo que la condición de compatibilidad entre las cartas se traduce en la existencia de divisores globales D_j en la variedad X, junto con índices de ramificación m_j tales que $D_{ij} = \mathcal{U}_i \cap D_j$ y $m_{ij} = m_j$.

Luego, a todo orbifold $\mathcal{X}$ podemos asociar un <u>par</u> (X, Δ) donde

$$\Delta := \sum_{\text{finita}} \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) D_j \qquad \text{(cf. Riemann-Hurwitz)}$$

es un $\mathbb{Q}$-divisor.

<u>Kollár '04</u> ("Seifert G_m-bundles"): El par (X, Δ) determina $\mathcal{X}$.

Idea: Dado un par (X,Δ) con $\Delta = \sum \left(1-\frac{1}{m_i}\right) D_i$, donde D_i divisor irred. y $m_i \geq 1$ enteros, se define una carta orbifold en X compatible con Δ como un revestimiento de Galois $\varphi : \mathcal{U} \to \varphi(\mathcal{U}) \subseteq X$ tal que:

① $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}^n$ es un abierto conexo y $\varphi(\mathcal{U})$ abierto de X.

② El "branch locus" de φ es $\lceil \Delta \rceil \cap \varphi(\mathcal{U})$, con $\lceil \Delta \rceil = \sum D_i$

③ Para todo $p \in \mathcal{U} \setminus \varphi^{-1}(\operatorname{Sing}(X) \cup \operatorname{Sing}(\Delta))$ tal que $\varphi(p) \in D_i$, el orden de ramificación de φ en p es $\operatorname{ord}_\varphi(p) = m_i$.

$\Rightarrow$ El orbifold $\mathcal{X}$ está determinado por un tal par (X,Δ) donde X está cubierto por cartas orbifold compatibles con Δ.

(Ver también: Boyer - Galicki - Kollár "Einstein metrics on spheres").

③ Espacios proyectivos con pesos:

Fijamos $\omega = (w_0, \dots, w_n) \in \mathbb{N}_+^{n+1}$ enteros positivos, y consideramos la acción de $\mathbb{C}^*$ en $\mathbb{C}^{n+1}$ dada por

$$\lambda \cdot (z_0, \dots, z_n) := (\lambda^{w_0} z_0, \dots, \lambda^{w_n} z_n).$$

Notar que si $W := \operatorname{mcd}(w_0, \dots, w_n)$, entonces las raíces W-ésimas de la unidad actuan trivialmente en $\mathbb{C}^{n+1}$, por lo que podemos reemplazar la acción por

$$\lambda \cdot (z_0, \dots, z_n) = (\lambda^{w_0/W} z_0, \dots, \lambda^{w_n/W} z_n)$$

ie, podemos asumir $W = 1$. Denotamos la acción de $\mathbb{C}^*$ por $\mathbb{C}^*(\omega)$.

Def: El espacio proyectivo con pesos $\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{P}(w_0, \dots, w_n)$ está dado por el cociente

$$\mathbb{P}(\omega) := (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \mathbb{C}^*(\omega).$$

En otras palabras, $\mathbb{P}(\omega) = \operatorname{Proj} S(w)$, donde $S(w) = \mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$ y $\operatorname{gr}(z_i) = w_i$.

Obs: $\mathbb{P}(w_0, \dots, w_n)$ es una variedad tórica con sing. cocientes (ver Fulton).

Veamos que $\mathbb{P}(\omega)$ tiene asociada una estructura de orbifold:

Para cada $i \in \{0, \dots, n\}$ definimos $\mathcal{U}_i = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \text{ tq } z_i = 1\} \cong \mathbb{C}^n$

y sea $G_i \subseteq \mathbb{C}^*(\omega)$ el sub-grupo de las raíces w_i-ésimas de la unidad.

$\Rightarrow \mathcal{U}_i$ es invariante bajo la acción de $G_i \cong \mathbb{Z}/w_i\mathbb{Z}$. Sea $V_i := \mathcal{U}_i / G_i$.

$\Rightarrow$ Las $\mathbb{C}^*(\omega)$-órbitas en $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) \setminus \{z_i = 0\}$ están en biyección con los puntos de V_i

Así, cubrimos $\mathbb{P}(\omega)$ usando las cartas orbifold

$$V_i = \{[z_0, \dots, z_n] \in \mathbb{P}(\omega) \text{ tq } z_i \neq 0\}.$$

Explícitamente, si consideramos coordenadas $(x_{i0}, x_{i1}, \dots, \widehat{x_{ii}}, \dots, x_{in})$ de $\mathcal{U}_i \cong \mathbb{C}^n$ entonces

$$(x_{i0}, x_{i1}, \dots, \widehat{x_{ii}}, \dots, x_{in}) \longmapsto [x_{i0}, x_{i1}, \dots, 1, \dots, x_{in}] = [z_0, \dots, z_i, \dots, z_n]$$

implica que $z_i = \lambda^{w_i} \cdot 1 = \lambda^{w_i}$ y $z_j = \lambda^{w_j} x_{ij}$ $(i \neq j)$ para cierto $\lambda \in \mathbb{C}^*$

$$\Rightarrow z_j^{w_i} = (\lambda^{w_i})^{w_j} x_{ij}^{w_i} = z_i^{w_j} x_{ij}^{w_i} \Rightarrow x_{ij}^{w_i} = \frac{z_j^{w_i}}{z_i^{w_j}} \rightsquigarrow \text{“} x_{ij} = \frac{z_j}{\sqrt[w_i]{z_i^{w_j}}} \text{”}$$

<u>Obs</u>: Usando lo anterior se puede describir explícitamente el atlas orbifold del orbifold $\mathcal{P}(\omega)$ asociado a $\mathbb{P}(\omega)$ (ver Boyer-Galicki "Sasakian geometry" §4.5).

⚠ Por el teorema de Chevalley-Shephard-Todd podemos reducirnos a cocientes por grupos pequeños. Luego, como <u>variedad</u> siempre podemos suponer que $\mathbb{P}(w_0, \dots, w_n)$ es bien formado, ie,

$$\operatorname{mcd}(w_0, \dots, \widehat{w_i}, \dots, w_n) = 1 \quad \text{para todo } i.$$

Por ejemplo: $\mathbb{P}(1,4,6) \cong \mathbb{P}(1,2,3)$ como variedades.

Sin embargo, como <u>orbifolds</u> $\mathcal{P}(1,4,6) \not\cong \mathcal{P}(1,2,3)$ pues se calcula $\operatorname{ord}(\mathcal{P}(1,4,6)) = 12$ y $\operatorname{ord}(\mathcal{P}(1,2,3)) = 6$.

Aquí, $\mathcal{P}(1,4,6)$ se identifica con $(\mathbb{P}(1,2,3), \frac{1}{2} D_0)$ con $D_0 = \{z_0 = 0\}$

<u>Objetivo</u>: Estudiar el lenguaje de orbifolds y aplicarlo al estudio de un problema de superficies algebraicas (trabajos de Roulleau y Rousseau).