# Orbi-lines bundles y orbi-amplitud

## Orbi-Line bundles.

*Idea:* Poner line bundles sobre los abiertos $u \subseteq \mathbb{C}^n$ que forman el orbi-atlas y "pegar".

*Def:* Sea $\mathcal{X} = (X, \mathcal{U})$ un orbifold, an orbi-line bundle $L$ sobre $\mathcal{X}$ es una colección $\{L_u\}_{u \in \mathcal{U}}$ de line bundles (fibrados lineales) en $u$ ($u \in \mathcal{U}$) tq

- $L_u$ es $G_u$-invariante, i.e., $\boxed{u \subseteq \mathbb{C}^n}$ ⚠

$$\text{si } \begin{array}{c} L_u \\ \downarrow \pi_u \\ u \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \forall \ell \in L_u \\ \pi_u(g \cdot \ell) = g \cdot \pi_u(\ell) \end{array}$$

[localmente $L_u$ es $u_0 \times \mathbb{C} \to \tilde{g} \cdot (u_0, t) = (g \cdot u_0, t)$ ]

- "Condición de pegado"

Sea $v \subset u$ un abierto, sean $\psi_{vu} : v \hookrightarrow u$, $f_{vu} : G_v \hookrightarrow G_u$, como en la definición de orbi-atlas.

para cada $g \in G_v$, tenemos los morfismos

$$\tilde{g} : L_v \to L_v, \quad \tilde{\psi}_{vu} : L_u|_{\psi_{vu}(v)} \to L_v, \text{ y}$$

$\tilde{f}(g) = \tilde{g}' : L_U \to L_U$ que deben cumplir:

$$\tilde{g} \circ \tilde{\psi} = \tilde{\psi}_{VU} \circ \tilde{g}'$$

Además, si $V \xrightarrow{\psi_{VU}} U \xrightarrow{\psi_{UW}} W$, con $V \xrightarrow{\psi_{VW}} W$, se cumple

que $\widetilde{\psi_{UW} \circ \psi_{VU}} = \tilde{\psi}_{VU} \circ \tilde{\psi}_{UW}$.

Ejemplo

Construir $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(-1) :=$ O(bi-tautological line bundle en $\mathbb{P}(w)$).

- $\omega = (6, 4, w_3)$

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= \{(x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{C}^2, \\ U_2 &= \{(x_1, x_3) \mid x_i \in \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{C}^2, \\ U_3 &= \{(x_1, x_2) \mid x_i \in \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{C}^2. \end{aligned}\right| \quad (1, x_2, x_3)$$

// Idea: $\pi_{U_1}((1, x_2, x_3), t) = t \cdot (1, x_2, x_3)$ //

acción de $\mathbb{C}^*(\omega)$

$$\begin{aligned} U_1 \times \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C} &\xrightarrow{\pi_{U_1}} \mathbb{C}^3 \\ ((1, x_2, x_3), t) &\longmapsto (t^6, t^4 x_2, t^{w_3} x_3) \end{aligned}$$

- $\pi_{u_1}$ es $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$-invariante.

$\xi$ una raíz 6 de unidad.

$$\xi \cdot \pi_u(x_2, x_3, t) = \xi \cdot (t^6, t^4 x_2, t^{\omega_3} x_3)$$
$$= (t^6, (t\xi)^4 x_2, (t\xi)^{\omega_3} x_3) \checkmark$$

$$\pi_u(\xi \cdot (x_2, x_3, t)) = \pi_u((t\xi)^4 x_2, (t\xi)^{\omega_3} x_3, t)) \checkmark$$
$$= (\underset{\sim}{t^6}, (t\xi)^4 x_2, (t\xi)^{\omega_3} x_3).$$

- Ahora veamos la condición de pegado.

$V = \{x_1 = 1\} \cap \{x_2 = 1\}$ $\qquad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright V$

$V = \{(1,1,x_3) \mid x_3 \in \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{C} \subseteq \mathbb{C}^3.$

$$L_V \simeq \{(1,1,x_3,t) \mid x_3, t \in \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C} \xrightarrow{\pi_V} \mathbb{C}^3$$

$$\pi_V(1,1,x_3,t) = (t^6, t^4, t^{\omega_3} x_3)$$

¿Quien actúa en $V$? R//: $\mathbb{Z}/\mathrm{mcd}(m_1, m_2)$.

$$\mathbb{Z}/\mathrm{mcd}(6,4)\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

- $f: \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\quad -1 \mapsto e^{\pi i} = -1$
$\quad 1 \longmapsto 3$ ,

. $\psi : V \hookrightarrow \mathcal{U}$ inclusión.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\times\{(1,1,x_3)\mid x_3\in\mathbb{C}\} = L_V & \longrightarrow & L_{\mathcal{U}} = \{(1,x_2,x_3,t)\}\simeq \mathbb{C}^2\times\mathbb{C} \\ {\scriptstyle \pi_V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\mathcal{U}}} \\ V & \hookrightarrow & \mathcal{U} \end{array}$$

$\tilde{\psi} : L_{\mathcal{U}}|_V \longrightarrow L_V$ inclusión

y sea $g = -1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$\tilde{g}\cdot\tilde{\psi} = g\cdot(1,1,x_3,t) = (1,1,(-1)^{\omega_3}x_3,t)$$

$$\tilde{\psi}\cdot\tilde{g}' = ((-1)^6,(-1)^4,(-1)^{\omega_3}x_3,t)$$

$$= (1,1,(-1)^{\omega_3}x_3,t)$$

$\Rightarrow \tilde{g}\cdot\tilde{\psi} = \tilde{\psi}\cdot\tilde{g}'$ ∎

Esa es la forma de definir $\mathcal{O}_{P(\omega)}(-1)$

de forma general.

$\left[\ \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \curvearrowright U_m,\ \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \curvearrowright U_k \ \middle|\ \begin{array}{c} \mathbb{Z}/\mathrm{mcd}(m,k)\mathbb{Z} \\ \circlearrowright \\ U_m \cap U_k. \end{array} \right]$

• $X :=$ Variedad suave

$D$ divisor primo en $X$, suave.

$\Updownarrow$

$\mathcal{X} = (X, (1-\frac{1}{m})D) \xrightarrow[\text{Construir}]{} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(-\frac{1}{m}D)$.

Hago el caso más sencillo, $m=2$

Es decir $\boxed{\mathcal{X} = (X, \frac{1}{2}D)}$ e $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(-\frac{1}{2}D)$.

Recordar:

$\mathcal{X} = (X, \frac{1}{2}D)$

La orbi-estructura viene dada por:

⓪ $\underbrace{\varphi_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \varphi_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})}_{\text{revestimiento de Galois}} \subseteq X$ tq

① $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto convexo y $\varphi_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}) \underset{\text{open}}{\subseteq} X$ ✓

② $\mathrm{Branc}(\varphi_{\mathcal{U}}) = \lceil D \rceil \cap \varphi_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})$

③ $\forall p \in \mathcal{U} \setminus \varphi_{\mathcal{U}}^{-1}(\mathrm{Sing}(X) \cap \mathrm{Sing}(D))$ tq

$\varphi_{\mathcal{U}}(p) \in D \Rightarrow \mathrm{ord}_{\varphi_{\mathcal{U}}}(p) = 2 \;\; (m_i) \;\; D_i$

La condición ③ dice que localmente

hay orden de ramificación 2 ⊕ Condición ⓪ (ser Galois), implica que:

- $\varphi_u(x_1,\dots,x_n) = (x_1^2, x_2,\dots, x_n) = (z_1, z_2,\dots, z_n)$

  $x_i$'s coordenadas de $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}^n$

  $z_i$'s coordenadas de $\varphi_u(\mathcal{U})\subseteq X$.

Lo que queremos es ver $\{z_1=0\}$ en $\mathcal{X}$ y ver que viene de un divisor lineal. $D=\{x_1=0\}$

Pero, $\{z_1=0\}=\{x_1^2=0\}$ y tomando $\lceil\{x_1^2=0\}\rceil$

tenemos $\{x_1=0\}$ ("raíz cuadrada o mitad del divisor")

- También tenemos que en $\mathcal{U}$ actúa $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\cong\{1,-1\}$ actúa como

$$\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)\sim(-x_1, x_2,\dots,x_n).$$

Pero esto nos dice que

$$g\cdot\varphi_u(\vec{x}) = (-x_1^2, x_2,\dots,x_n) \quad \& \quad \varphi_u(g\vec{x}) = (x_1^2, x_2,\dots,x_n)$$

$\Rightarrow$ tomar $x_1$ no es invariante, así que tomamos $x_1^2$ como sección para tener la estructura de orbi-line bundle.


$\boxed{\tfrac{1}{2}D \text{ arriba.}}$

$\boxed{D \text{ abajo}}$

$$\left.\frac{x^2}{f_*(u) \quad D}\right\} = X$$

En la orbi-estructura tomar "raíz" cuadrada.
O en general tomar "m-th raíz".

¿Esto nos permite hacer cubrimientos orbi-cíclicos siempre?

- Formado $\boxed{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\frac{1}{m}D)}$ podemos tomar $\otimes\, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(n)$ y así obtener $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\frac{n}{m}D)$.
  "Tomamos raíz $\frac{n}{m}$ de las secciones".

  y $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\frac{n}{m}D)$ es usual sii $\frac{n}{m} \in \mathbb{Z}$.

- $$\begin{tikzcd}
\mathcal{X} = (X, (1-\frac{1}{m})D) \arrow[r, squiggly] \arrow[d, squiggly] & \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\frac{n}{m}D) \arrow[d, squiggly] \\
X \arrow[r, squiggly] & \mathcal{O}_X(\lfloor \frac{n}{m} \rfloor D)
\end{tikzcd}$$

Con $\lfloor x \rfloor :=$ función piso de $x$.

Una sección $s_0$ de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\frac{n}{m}D)$, $s_0$ invariante, tiene la forma

$$s_0 = s_{D/m}^{\left(\frac{1}{m} - \lfloor \frac{n}{m} \rfloor\right)} \cdot t$$

Con $s_{D/m}$ sección de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\frac{1}{m}D)$ y

$$t \in \Gamma(\mathcal{O}_X(\lfloor \tfrac{n}{m} \rfloor)).$$

• Sea $\mathcal{X} = (X, \Delta)$; un par orbifold, $\Delta = \left(1 - \frac{1}{m}\right) D$.
Primo.

Tomando localmente $\{x = 0\} = D$, en las orbicartas tenemos coordenadas locales
$x = z^m$, "$z = \sqrt[m]{x}$".

Así que,
$$dx = m z^{m-1} dz = m x^{1-\frac{1}{m}} dz$$
$$\rightsquigarrow \quad \boxed{\text{"}dz = \frac{1}{m} x^{-(1-\frac{1}{m})} dx\text{"}}$$

Luego
$$K_{orb(\mathcal{X})} = K_X + \left(1 - \frac{1}{m}\right) D$$
$$= K_X + \Delta.$$

más generalmente; $\mathcal{X} = \left(X, \sum_{i=0}^{k} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) D_i\right) = (X, \Delta)$,

entonces $K_{orb(\mathcal{X})} = K_X + \Delta$.

## Orbi-Amplitud

**Recordemos:** Un fibrado lineal $L$ sobre un manifold complejo $X$ de dim $n$, es muy amplio si $\varphi_{|L|} : X \longrightarrow \mathbb{P}(|L|)$

$x \mapsto [s_0(x), \dots, s_\ell(x)]$ )

es un embedding y, $L$ es amplio si $\exists k >> 0$ tq $L^{\otimes k}$ es muy amplio.

Lo que se quiere es extender ese concepto al caso orbifold para tener un teorema "Embebimiento de Kodaira" versión orbifold.

$$\mathcal{X} = (X, \Delta) \xhookrightarrow[\varphi_{orb}^{(|L|)}]{} \mathbb{P}(w)$$

Que transfiera la orbi-estructura de la mejor manera

No-ejemplo.

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{C}$ $\quad z \leftrightarrow -z$

$\simeq \mathbb{C}/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \boxed{X}$

$$\begin{array}{c} z \in \mathbb{C} \\ \downarrow \\ z^2 = x \in X \end{array}$$

Supongamos $L$ un fibrado lineal sobre $X$ como manifold.

$$\begin{tikzcd} \boxed{L^* = \pi^*(L)} \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{C} \arrow[r, "q"'] & X \end{tikzcd} \qquad \left[ \begin{array}{c} \mathbb{C} \times \mathbb{C} \\ \downarrow \\ \mathbb{C} \end{array} \right.$$

Las secciones de $L^* / \mathbb{C}$ que son

$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$-invariantes son $\mathbb{C}[x] = \mathbb{C}[z^2]$.

Pero estos solo ven la parte manifold,

pues al identificar $z \rightsquigarrow -z$, como

orbifold las secciones son $\boxed{z\,\mathbb{C}[z^2]} = \sqrt{x}\,\mathbb{C}[x]$.
$z$

Así que, $L^*$ no nos sirve.

Sí.

Pero, si iniciamos con $L = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \xrightarrow{} \mathbb{C}$ el
$\circlearrowleft \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ no trivial

fibrado trivial, entonces las secciones de $L$
son $\sqrt{x}\,\mathbb{C}[x] = z\,\mathbb{C}[z^2]$. Entonces las
secciones de $L$ y sus potencias generan

$\mathbb{C}[\sqrt{x}] = \mathbb{C}[z]$, que sí ven la orbiestructura.

**Obs:** Dado un orbifold $\mathcal{X} = (X, \Delta)$,
casi nunca funciona poner un
$L \longrightarrow X$ amplio, para obtener un line-bundle
orbi-amplio.

[$L \leftrightarrow L_x$ es generado por secciones globales.

Pero ahora las secciones deben recordar

$\lfloor$ la acción de $G_{\mathcal{U}}$, $x \in \mathcal{U}$ $\rfloor$

**Def:** Sea $L$ un orbi-line bundle sobre $\mathcal{X} = (X, \Delta)$.

- $L$ es localmente-amplio si dada una orbicarta $\mathcal{U} \ni x$, con $x \in X$, el $\mathrm{Stab}_{G_{\mathcal{U}}}(x)$ actúa fielmente $L_x$.

- $L$ es globalmente-positivo si $L^{\mathrm{ord}(\mathcal{X})}$ es amplio en el sentido usual sobre $X$. [eg. métrica Hermitiana curvatura $+$].

- $L$ es orbi-amplio sobre $\mathcal{X}$ si es localmente-amplio y globalmente positivo.

[ local - Global ]

**Def:** Un par $(\mathcal{X}, L)$ se dice un orbifold polarizado si $L$ es un orbi-line bundle orbi-amplio en $\mathcal{X}$.

**Ejemplos:** • Si $\mathcal{X} = (X, \Delta)$ con $\Delta = \sum \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) D_i$ es un orbifold, con

$\underline{X}$ suave. Dado $H$ amplio en $X$.

Entonces $H+\Delta$ es orbi-amplio para $\mathcal{X}$ si y solo si $H+\Delta$ es un $\mathbb{Q}$-divisor amplio para $X$.

- $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(1) :=$ El fibrado de hyperplanos en $\mathbb{P}(w)$. Es orbi-amplio.

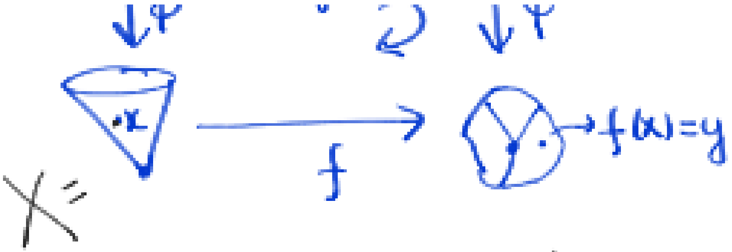
[Weigthed projective varetres, Dol 82].

orbifold $= \mathcal{X} \underset{\text{orbi-embedding}}{\xhookrightarrow{\;i\;}} \mathbb{P}(w)$, entonces

$i^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(1))$ es orbi-amplio en $\mathcal{X}$.

Todo orbifold $\mathcal{X}$ que admita un orbi-embedding a un projectivo con pesos $\mathbb{P}(w)$, admite un fibrado lineal orbi-amplio.

$\mathcal{U} \xrightarrow{\tilde{f}} V$ $\qquad$ $f : \phi(u) \to \varphi(u)$




$\tilde{f}: \mathcal{U} \to V$

$\varphi \circ \tilde{f} = f \circ \phi.$

$$\left[\ \phi: \mathcal{U} \to \mathcal{U}/G_{\mathcal{U}}\ ,\ \varphi: \mathcal{V} \to \mathcal{V}/G_{\mathcal{V}}\ \right]$$

Quedan las herramientas para el Orbi-Embedding de Kodaira.

Last modified: 16:03