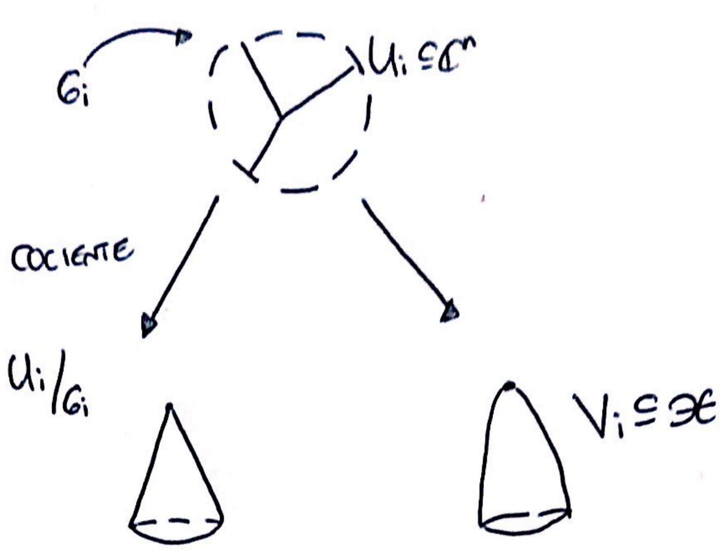
SGA 2020.2: "CLASES DE CHERN Y RIEMANN-ROCH PARA ORBIFOLDS"



"LOCALMENTE EL COCIENTE DE UN ABIERTO DE $\mathbb{C}^n$ POR UN GRUPO FINITO" (RECORDANDO EL GRUPO)

DEF: EL DATO (X, Δ) ES UN LOG-PAIR SI X ES UNA VARIEDAD ALGEBRAICA NORMAL Y Δ ES UN $\mathbb{Q}$-DIVISOR EFECTIVO.

$$\Delta = \sum_i d_i D_i ,$$

DONDE D_i SON DIVISORES IRREDUCIBLES DISTINTOS Y $d_i \in \mathbb{Q}$.

PARA ORBIFOLDS, NECESITAMOS CONSIDERAR SOLO PARES (X, Δ) TAL QUE Δ TIENE LA FORMA

$$\Delta = \sum_i \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) D_i .$$

DONDE D_i SON DIVISORES PRIMOS Y $m_i \in \mathbb{N}$.

REFERENCIA: "ON THE HYPERBOLICITY OF SURFACES OF GENERAL TYPE WITH SMALL c_1^2" ROULLEAU, ROUSSEAU.

DEF: UNA CARTA ORBIFOLD EN X COMPATIBLE CON Δ ES UN CUBRIMIENTO DE GALOIS

$$\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subseteq X \qquad \text{t.q}$$

(1) $U \subseteq \mathbb{C}^n$ ES UN ABIERTO CONEXO Y $\varphi(U)$ ES ABIERTO DE X.,

(2) EL 'BRANCH LOCUS' DE φ ES $\lceil \Delta \rceil \cap \varphi(U)$.,

(3) PARA TODO $p \in U \setminus \varphi^{-1}(X_{sin} \cup \Delta_{sin})$ TAL QUE $\varphi(p) \in D_i$, EL ORDEN DE RAMIFICACIÓN DE φ EN p ES $\mathrm{ord}_{\varphi}(a) = m_i$.

DEF: UN ORBIFOLD $\mathfrak{X}$ ES UN LOG-PAIR TAL QUE X ES CUBIERTO POR CARTAS ORBIFOLD COMPATIBLES CON Δ.

DEF: SEA (X, Δ), $\Delta = \sum_i (1 - 1/m_i) C_i$ UN PAR DONDE X ES UNA SUPERFICIE NORMAL Y $K_X + \Delta$ $\mathbb{Q}$-CARTIER. SEA $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ UNA RESOLUCIÓN DE SINGULARIDADES (X, Δ), ENTONCES LOS DIVISORES EXCEPCIONALES E_i Y LAS COMPONENTES DE LA TRANSFORMADA ESTRICTA DE Δ, TIENEN CRUCES NORMALES Y

$$K_{\tilde{X}} + \tilde{\Delta} + \sum_i E_i = \pi^*(K_X + \Delta) + \sum_i a_i E_i$$

DECIMOS QUE (X, Δ) ES KAWAMATA LOG TERMINAL (klt) SI $a_i > 0$ $(a_i - 1 > -1)$ PARA TODA CURVA EXCEPCIONAL E_i.

PROP: SEA $(p \in X)$ GERMEN DE UNA SUPERFICIE NORMAL X. SON EQUIVALENTES:

$(p \in X)$ ES klt $\Longleftrightarrow$ $p \in X$ COCIENTE DE $0 \in \mathbb{C}^2$ POR LA ACCIÓN DE UN GRUPO FINITO LINEAL EN codim 1.

TEOREMA: SEA (X,Δ) UN PAR DONDE X ES UNA SUPERFICIE ALGEBRAICA NORMAL Y Δ TIENE MULTIPLICIDADES DE LA FORMA $(1-1/m)$. LAS SIGUIENTES CONDICIONES SON EQUIVALENTES CERCA DE CADA PUNTO DE X.

(1) (X,Δ) ES klt

(2) (X,Δ) TIENE GRUPO FUNDAMENTAL FINITO

(3) (X,Δ) ES LOCALMENTE PRESENTADO COMO UN COCIENTE $\pi: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2/G \cong X$, DONDE G ES UN GRUPO FINITO ACTUANDO LINEALMENTE EN $\mathbb{C}^2$ Y Δ ES EL ÚNICO $\mathbb{Q}$-DIVISOR EN X TAL QUE $\pi^*(K_X+\Delta) = K_{\mathbb{C}^2}$.

DEM: VER TEOREMA 5.2 DE "ABELIANITY CONJECTURE FOR SPECIAL COMPACT KÄHLER THREEFOLDS" – CAMPANA Y CLAUDON.

EJEMPLO: SEA (X,Δ), $\Delta = \sum_i (1-1/m_i) C_i$ UN PAR klt CON X UNA SUPERFICIE, ENTONCES (X,Δ) ES UN ORBIFOLD

CLASES DE CHERN

SEA $\pi: \mathcal{X} \longrightarrow (X,\Delta)$; UN ORBIFOLD 2-DIMENSIONAL. SEA S EL CONJUNTO DE PUNTOS SINGULARES DE X Y DEL DIVISOR $\lceil\Delta\rceil$, $\Delta = \sum_i (1-1/m_i) D_i$.

$$S = X_{sing} \cup \lceil\Delta\rceil_{sing}.$$

EL DIVISOR CANÓNICO ORBIFOLD ES $K_{\mathcal{X}} = \pi^*(K_X+\Delta)$

· PARA SUPERFICIES $\tilde{S}$
$$\begin{cases} c_1(\tilde{S}) = -K_{\tilde{S}} \\ c_2(\tilde{S}) = e(\tilde{S}) \quad \text{(CARACTERÍSTICA TOPOLÓGICA).} \end{cases}$$

PARA ORBIFOLDS,

$$c_1(\mathcal{X}) = -\pi^*\left(K_X + \sum \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) D_i\right)$$

$$c_2(\mathcal{X}) = e_{orb}(\mathcal{X})$$

<u>CARACTERÍSTICA DE EULER (TOPOLÓGICA) DE UN ORBIFOLD $\mathcal{X}$</u>

SEA $p \in X$ Y CONSIDERE LA CARTA (U, φ) COMPATIBLE CON Δ.

DADO $x \in \varphi^{-1}(p)$; EL GRUPO DE ISOTROPÍA DE x ESTÁ DADO POR

$$\Gamma_x = \{g \in G : g.x = x\}, \text{ DONDE } \left(\varphi(U) = U/G\right)$$

NO DEPENDE DE x, ASÍ QUE

$$\Gamma_p := \Gamma_x \quad \text{PARA ALGÚN } x \in \varphi^{-1}(p).$$

DENOTAMOS POR $\Sigma_{\Gamma_p} = \{q \in X : \Gamma_q = \Gamma_p\}$, TENEMOS LA DESCOMPOSICIÓN

$$X = \bigsqcup_\alpha \Sigma_\alpha$$

DONDE CADA Σ_α ES UNA COMPONENTE CONEXA DE ALGÚN Σ_{Γ_p}.

ESTA DESCOMPOSICIÓN SE LLAMA <u>ESTRATIFICACIÓN CANÓNICA</u> DE $\mathcal{X}$.
CADA Σ_Γ SE LLAMA ESTRATO.

<u>DEF</u>: UNA <u>TRIANGULACIÓN</u> DE $\mathcal{X}$ ES UNA TRIANGULACIÓN DEL ESPACIO TOPOLÓGICO X. DECIMOS QUE UNA TRIANGULACIÓN DE $\mathcal{X}$ ES <u>COMPATIBLE</u> SI LO ES CON LA ESTRATIFICACIÓN CANÓNICA.

SE DEFINE LA CARACTERÍSTICA DE EULER PARA UN ORBIFOLD $\mathfrak{X}$ COMO:

$$e_{orb}(\mathfrak{X}) := \sum_{\Gamma} (-1)^{\dim \Sigma_\Gamma} \left(\frac{e(\Sigma_\Gamma)}{|\Gamma|} \right)$$

(INICIALMENTE DEFINIDO POR SATAKE EN [THE GAUSS-BONNET THEOREM FOR V-MANIFOLDS]).

<u>EJEMPLO:</u> CONSIDERE EL ORBIFOLD $\mathfrak{X}$ DADO POR $\mathbb{C}^2/G$, DONDE $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

$$\varphi : \mathbb{C}^2 \longrightarrow$$
$$\zeta \cdot (x,y) \longrightarrow (\zeta x, \zeta y) \quad , \ \zeta^2 = 1$$

LOS GRUPOS DE ISOTROPÍA SON

PARA $(x,y) \neq (0,0)$, $\Gamma_{(x,y)} = \{\zeta : \zeta \cdot (x,y) = (x,y)\} = \{1\}$, LUEGO

$$\Sigma_{\Gamma_{(x,y)}} = \Sigma_{\Gamma_{\{e\}}} = \mathbb{C}^2/G \setminus \{(0,0)\}$$

PARA $(0,0)$ $\quad \Gamma_{(0,0)} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \Rightarrow \Sigma_{\Gamma_{(0,0)}} = \{(0,0)\}$.

ASÍ

$$e_{orb}(\mathfrak{X}) = \frac{e(\mathbb{C}^2/G \setminus \{(0,0)\})}{|\{e\}|} + \frac{e(\{(0,0)\})}{2}$$

$$= 0 + \frac{1}{2}$$

$$\boxed{e_{orb}(\mathfrak{X}) = \frac{1}{2}}$$

SATAKE PROBÓ LA FORMULA DE GAUSS-BONNET PARA ORBIFOLDS. $(X,\Delta)=\mathcal{X}$

$$\boxed{c_2(\mathcal{X})=e_{orb}(\mathcal{X})=e(X)-\sum\left(1-\frac{1}{m_i}\right)e(D_i\setminus S)-\sum_{p\in S}\left(1-\frac{1}{\beta(p)}\right)}$$

DONDE $S=X_{sing}\cup\Delta_{sing}$. $\beta(p)=|\Gamma_p|$ (ORDEN DEL GRUPO DE ISOTROPIA)

EN NUESTRO EJEMPLO, $\mathcal{X}=\mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

$$e_{orb}(\mathcal{X})=e\left(\mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\right)-\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

EJEMPLO: CONSIDERE UNA SUPERFICIE NORMAL X CON SINGULARIDADES ADE. (SINGULARIDADES CANONICAS). HAY UNA ESTRUCTURA NATURAL DE ORBIFOLD PARA X.

CONSIDEREMOS $\pi: Y\longrightarrow X$ UNA RESOLUCIÓN DE SINGULARIDADES.

$$K_Y\equiv\pi^*(K_X)+\sum_i a_iE_i$$

DONDE $E_i^2=-2$. Y TENEMOS QUE $a_i=0$ Y ASÍ $K_Y\equiv\pi^*(K_X)$

PROPOSICIÓN: SEA X UNA SUPERFICIE NORMAL CON SINGULARIDADES ADE.. SEA $\pi: Y\to X$ UNA RESOLUCIÓN DE SINGULARIDADES. SEA a_n, d_n Y e_n EL NUMERO DE SINGULARIDADES A_n, D_n Y E_n RESPECTIVAMENTE. ENTONCES

$$c_1^2(\mathcal{X})=c_1^2(Y)$$

$$c_2(\mathcal{X})=c_2(Y)-\sum(a_n+d_n+e_n)$$

$$+\sum\frac{a_n}{n+1}+\frac{d_n}{4(n-2)}+\frac{e_6}{24}+\frac{e_7}{48}+\frac{e_8}{120}$$

EJEMPLO: SUPONGA QUE X TIENE SOLO SINGULARIDADES A_n, ENTONCES.

$$\pi : Y \to X$$

$$c_1^2(\mathcal{X}) = c_1^2(X) = (\pi^*(K_Y))^2 = K_Y^2 = c_1^2(Y).$$

y

$$c_2(\mathcal{X}) = c_2(Y) - \sum_{p \in S} \left(1 - \frac{1}{\beta(p)}\right), \quad S = X_{sin}$$

$$= c_2(Y) - \left(\sum a_n \left(1 - \frac{1}{\beta(p)}\right)\right) \qquad \beta(p) = n+1$$

$$= c_2(Y) - \sum_n a_n\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= c_2(Y) - \sum a_n + \sum \frac{a_n}{n+1}.$$

TEOREMA [R-R PARA ORBIFOLD]. SEA $\mathcal{X}$ UN DELIGNE-MUMFORD STACK CON UN ESPACIO DE MODULI COARSE · Y CON RESOLUCIÓN PROPIA (ESTO ES, CUALQUIER HAZ COHERENTE ES UN COCIENTE DE UN FIBRADO LINEAL). SEA E UN HAZ COHERENTE EN $\mathcal{X}$. ENTONCES

$$\chi(\mathcal{X}, E) = \int_{\mathcal{X}} \widetilde{ch}(E)\, \widetilde{Td}(T_{\mathcal{X}})$$

[USANDO TEORÍA DE INTERSECCIÓN EN STACKS.

EN PARTICULAR, SE OBTIENE LA FÓRMULA ASINTÓTICA

$$\chi(\mathcal{X}, E^k) = \frac{c_1(E)^n}{n!} k^n + O(k^{n-1})$$

REF: "THÉORÈMES DE RIEMANN-ROCH POUR LES CHAMPS DE DELIGNE MUMFORD" TÖEN.