SGA 4

7/Sept/20

Chole 1

(1) [Roulleau-Rousseau, JLMS] "On the hyperb. of surg. of gen. type with small c_1^2".

(2) [RR, Duke] "Canonical surg. with Ω^1 big".

± Un reporte sobre esos papers.

X = sup. proy. sobre $\mathbb{C}$ con sólo sing. ADE

'' su Vol

'' Rat. double pts.

A_n: $\underbrace{\bullet - \bullet \cdots - \bullet}_{n}$, $-2 \; -2 \; \cdots \; -2$

D_n

E_6, E_7, E_8

Y = sup. proy suave sobre $\mathbb{C}$

Ω^1_Y = haz de 1-diferenciales holomorfas en Y

Ω^2_Y = '' '' 2-difer. '' '' '' $\simeq \mathcal{O}_Y(K_Y) \in \mathrm{Pic}(Y)$

$c_i(\Omega^{1\vee}_Y)$ = clases de Chern de Y : $c_1 = -K_Y$, c_2

'' tangente

números de Chern $c_1^2 = K_Y \cdot K_Y$, $c_2 = e(Y)$ = car. topo. Euler.

Si $\mathcal{E}$ es un haz localmente libre de rango r en Y

$\Rightarrow$ $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow Y$ proj. bundle de $\mathcal{E}$ sobre Y.

(fibración de $\mathbb{P}^{r-1}$) Tenemos una clase de divisor "tautológico canónico" $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$.

$Y = \mathrm{Spec}(k)$
$\mathcal{E} = V$ esp. ~~vect~~ dim r
$\Rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}) = \mathbb{P}^{r-1}$

- $\mathcal{E}$ es <u>big</u> $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$ es big,

y así se verifica $h^0(S^m\mathcal{E}) = h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(m)) \sim C \cdot m^{r-1+\dim(Y)}$

C alguna const > 0.

$\longrightarrow$ El personaje en esto será $S^m\Omega^1_Y$ que son "m productos conmutativos de 1 dif. holomorfas". El tema es <u>hiperbolicidad</u>.

Def 1.- Una __curva entera__ en Z = variedad es un morfismo holomorfo __no__ constante $\mathbb{C} \longrightarrow Z$. Un Z se dice (Brody) hiperbólico si __no__ hay curvas enteras.

Ej 1.- Y = curva proy. suave, Y hiperbólica $\Longleftrightarrow g(Y) \geq 2$.
Para superficies es más complicado. Tipo general __NO__ garantiza hiperbolicidad.
(Eg. Sup. de Fermat $(x_0^n + x_1^n + x_2^n + x_3^n = 0) \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, $n \geq 5$)
Tienen un montón de rectas $\simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$
ejemplo $\{x_0 = \zeta x_1\} \cap \{x_2 = \zeta x_3\}$ con $\zeta^n = -1$.

__Pero__:

(Conj. Green-Griffiths-Lang) Y = variedad proy suave con K_Y big (ie tipo general). Entonces existe un $Z \subsetneq Y$, Z Zariski cerrado el cual contiene a todas las curvas enteras.
[Para superficies dice en particular: finitas curvas racionales y elípticas

racionalmente hablando (i.e. aceptan singul.)]

Para superficies de tipo general tenemos las desigualdades generales:

$$\frac{1}{5}(c_2 - 36) \leq c_1^2 \leq 3c_2$$

y así esencialmente $\frac{c_1^2}{c_2} \in$ $\frac{1}{5}$? 1 alg. cuasi-hiperb. 3 .

¡todos hiperbólicos! $c_1^2 = 3c_2 \Rightarrow$ ($\mathbb{B}_2/\Gamma = Y$ Yau, Miyaoka)

Bogomolov demostró: Si $\frac{c_1^2}{c_2} > 1 \Rightarrow \exists$ finitas curvas rac. y elípt en Y.

algebraicamente cuasi-hiperbólico.

McQuillan mostró: Si $\frac{c_1^2}{c_2} > 1 \Rightarrow$ cuasi-hiper. (i.e. GGL cierto).

¡No sabemos que sucede en $[\frac{1}{5}, 1]$!

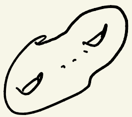
Es decir, podrían haber superficies de tipo general con ∞ curvas racionales (por ejemplo).

$\rightarrow$ ¿Qué tiene que ver $S^m(\Omega^1_Y)$?

(Idea de Bogomolov) Miror Webs, ie, secciones de $\mathcal{L}\otimes S^m\Omega^1_Y$

buscar: Jorge Pereira IMPA

Sea $\Gamma\subset Y$ curva cualquiera. Miror

 $=\bar{\Gamma} \xrightarrow[\text{normalización}]{\nu} \Gamma\subset Y$, Sea $\underset{\neq 0}{\omega}\in H^0(\mathcal{L}\otimes S^m(\Omega^1_Y))$ y

miramos como restringe a $\bar{\Gamma}$, es decir,

$$\nu^*(\omega)\in H^0(\underbrace{\nu^*(\mathcal{L})\otimes \Omega^{1\ \otimes m}_{\bar{\Gamma}}}_{\text{line bundle}})$$

Queremos saber si $\nu^*(\omega)\equiv 0$ sobre $\bar{\Gamma}$.

Si por grado no hay secciones aquí

$\Rightarrow$ listos $\nu^*(\omega)\equiv 0$. (Y eso se puede medir con el grado: $\underbrace{\deg(\nu^*\mathcal{L})}_{\mathcal{L}\cdot\Gamma\,\leq 0}+\underbrace{m(2g(\bar{\Gamma})-2)}_{g=0\ -2m\ \text{o}\ g=1\ 0}<0$)

$\Rightarrow$ listos!!!

Si eso pasa $\Rightarrow$ Γ es una hoja de la web que define ω. $\omega = 0$ ec. dif.

Ahora, si hay ∞ rac./elípticas $\Rightarrow$ hay ∞ hojas alg. en la web $\Rightarrow$ produce foliaciones con infinitas componentes rac. o elípticas $\rightarrow\leftarrow$ tipo general.
(contradicción con)

En efecto $\mathcal{L} = 0$ sirve si tenemos $H^0(S^m \Omega^1_Y) \neq 0$ (para el arg. de rac. elípticas).

(Si $Y \subseteq \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ superficie suave $\Rightarrow H^0(S^m \Omega^1_Y) = 0$).

$\rightarrow$ Meta de los papers RR:

(1) Mostrar $\nexists$ rat/Elípticas en sup. de Horikawa

[JLMS] "sin uso" de $S^m \Omega^1_Y$.

$\left(\text{ie } \frac{c_1^2}{c_2} \text{ mínimo} \right)$

(2) Criterio para sup. X con ADE sing tal que la resolución Y tiene Ω^1_Y big. $\left(h^0(S^m \Omega^1_Y) \sim c m^3 \right)$

[Dube]

$\Downarrow$ $\neq 0$

alg. casi-hip.

[SLMS]: <u>Preg. cool</u>: "Encontrar $X \subseteq \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ grado 5 hiperbólica" (grado ≥ 6 ✓ se sabe)

IDEA del paper se reduce a 1 proposición clave:

$z^2 = xy$ $A_{2-1} = A_1$ nodo

$D \subset \mathbb{P}^2$ D_k muy generales de grado d_k.

$\overset{\|}{\cup D_k}$ Para $n \mid d = \sum d_k$ se construye cubr. cíclico

solo sing A_{n-1} $\rightarrow$ normal proy. sup. $= X \xrightarrow[n:1]{p} \mathbb{P}^2$ ramificado sobre D

$\boxed{\underbrace{D_1 + D_2}_{x=0 \quad y=0} + \dots + D_r \sim \underset{n(d_L)}{d} \cdot L}$

local: $\{ z^d = xy \}$ A_{d-1}

¿Dónde puede tener X curvas racionales o elípticas?

Teo: $\underset{\substack{\shortparallel \\ \text{curva}}}{C} \xrightarrow{f} X$ tal que $p(f(C))$ no está contenido en D

$$\Rightarrow \underset{\substack{\shortparallel \\ 2g-2}}{\deg(K_C)} \geq \underbrace{\left(d - \frac{d}{n} - 4\right)}_{>0} \underbrace{\deg(p(\overset{C'?}{f(C)}))}_{>0}.$$

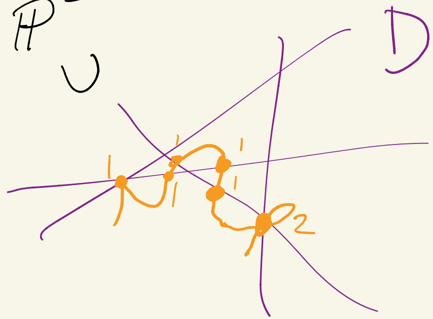
Idea:

Teo (Chen): Para toda curva $C' \subset \mathbb{P}^2$ se tiene

$$2g-2 + i(C', D) \geq (d-4)\deg(C')$$

$d = \sum d_k$, $i(C', D) = \#\{$ puntos distintos de $\nu^*(D)$, $\nu : \overline{C'} \to C'$ normalización $\}$

$\mathbb{P}^2 \supset$



$\longleftarrow \quad X \supset$ rat/ellip.

(cuento rápido)

$$\sum_{i=1}^{i(C_1,D)} \left(1-\frac{1}{m_i}\right) \geq i(C_1,D) - \frac{d}{n}\deg(C_1)$$

+ Chen

$$\underbrace{2g(C_1)-2+\sum\left(1-\frac{1}{m_i}\right)}_{\frac{\deg(K_C)}{|G|}} \geq \left(d-\frac{d}{n}-4\right)\deg(C_1)$$

$\vee$
$0 \qquad (d,n)$

∎