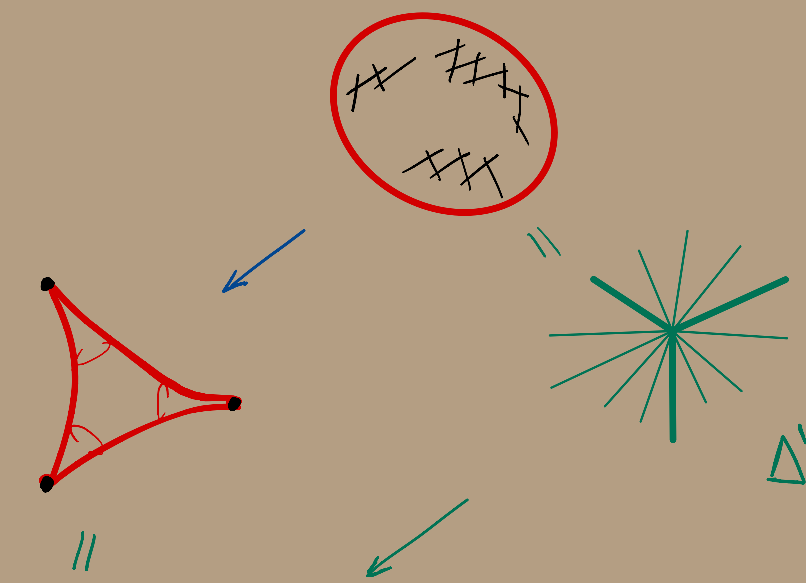
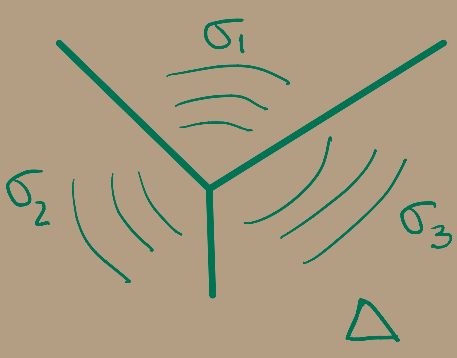
Giancarlo Urzúa





Escuela doctoral

UC 2021

"Geometría Tórica"

4-5-6-7 octubre

10 a 11:15

11:35 a 12:50

Referencia: "Lecture notes on toric varieties"
Mircea Mustata (en su página web).

§1. Variedad afín de un semi-grupo.

$(S,+)$ semi-grupo finitamente generado en $\mathbb{Z}^n$
[ie es como un grupo abeliano f.g. dentro de $\mathbb{Z}^n$ **sin** necesariamente todos sus inversos.]

Ejl.- $S_1 = \langle 2,3 \rangle \subset \mathbb{Z}$; $S_2 = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \subset \mathbb{Z}^2$
$S_3 = \langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \subset \mathbb{Z}^3$.

$2n + 3m$
$n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Así tenemos $\mathbb{N}^m \xrightarrow{\phi} S \hookrightarrow \mathbb{Z}^n$.

Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado.

Ejl.- $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{F}_p}$.

Considerar $k[S] :=$ k-espacio vectorial con base χ^u, $u \in S$
y ponemos además:

$$\chi^0 := 1 \quad \text{y} \quad \chi^u \cdot \chi^{u'} := \chi^{u+u'} \quad \forall u, u' \in S$$

$\therefore$ $k[S]$ es una k-álgebra f.g.

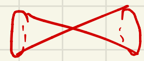
Ej.- $k[\mathbb{N}^m] \cong k[x_1, \dots, x_m] \longleftrightarrow k^n \quad (\mathbb{A}^n_k)$

$k[\mathbb{Z}^n] \cong k[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm n}] \longleftrightarrow (k^*)^n$

$$k[x,y] \twoheadrightarrow k[S_1] \cong k[x,y]/(y^3 - x^2) \longleftrightarrow (y^3 = x^2) \subset k^2$$

$x \mapsto x^3$, $y \mapsto x^2$

$$k[x,y,z] \twoheadrightarrow k[S_2] \cong k[x,y,z]/(z^2 - xy) \longleftrightarrow (z^2 = xy) \subset k^3$$



Tenemos $\underbrace{k[\mathbb{N}^m] \twoheadrightarrow k[S]} \hookrightarrow k[\mathbb{Z}^n]$

corresponde a una variedad (dominio) X_S

Dado $S \subset \mathbb{Z}^n$, $S^{gr} := \{ u_1 - u_2 \in \mathbb{Z}^n : u_1, u_2 \in S \}$ es el grupo más pequeño que contiene a S.

Si $S = \langle u_1, \dots, u_m \rangle \Rightarrow S^{gr} = \langle S, -(u_1 + \dots + u_m) \rangle$

$\Rightarrow k[S^{gr}] = k[S]_{\chi^{u_1 + \dots + u_m}}$ $\therefore$ $(k^*)^\ell \subset X_S$ es un abierto Zariski de X_S.

$\Leftrightarrow D(\chi^{u_1 + \dots + u_m})$

$\therefore$ X_S es una variedad afín que contiene densamente a $(k^*)^\ell$

[y así racional] ¿Cómo describirla?

Prop 1 : Si $f: k[t_1,\dots,t_m] \longrightarrow k[S]$ como arriba, entonces

$$\ker(f) = \langle t^a - t^b \ / \ a,b \in \mathbb{N}^m \ \ \phi(a)=\phi(b) \rangle$$

Ej 1.- $\mathbb{N}^2 \xrightarrow{\phi} \langle 2,3 \rangle$ con $\phi\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=2$

$\phi\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=3$

$$\Rightarrow \quad k[x,y] \xrightarrow{f} k[S_1]$$
$$x \mapsto x^2$$
$$y \mapsto x^3$$

y se prueba que $\ker(f) = (y^2 - x^3)$.

En relación a morfismos ...

Si $\phi : S' \longrightarrow S$ morfismo de semi-grupos, entonces tenemos $f: k[S'] \longrightarrow k[S]$, $f(x^{u'}) = x^{\phi(u')}$ morfismo de k-álgebras.

$\therefore \quad F: X_S \longrightarrow X_{S'}$

morfismo de variedades.

Ejlo. $\phi : \underset{= S_1}{\langle 2,3 \rangle} \hookrightarrow \mathbb{N}$ $\qquad k[S_1] \longrightarrow k[\mathbb{N}]$

$k[x,y]/(y^2-x^3)$ $\quad x \mapsto t^3, \; y \mapsto t^2$

$\Rightarrow \quad F : \mathbb{A}^1 \longrightarrow (y^3 = x^2) \subset k^2$

$t \mapsto (t^3, t^2)$

que viene a ser su resolución de singularidad.

$\left[S^{sat} = \{ u \in S^{gr} : mu \in S \ \forall m > 0 \} \right.$

$\left. \Rightarrow \quad X_{S^{sat}} \longrightarrow X_S \text{ es la normalización} \right]$

§2. Conos $\rightsquigarrow$ abanicos.

$$N = \mathbb{Z}^n \subset N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$$

$$M = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^n \subset M_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n$$

dual de N

σ = cono convexo polihedral racional puntiagudo

$\cap$

$N_{\mathbb{R}}$

cono: $u \in \sigma \Rightarrow \lambda u \in \sigma \ \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$

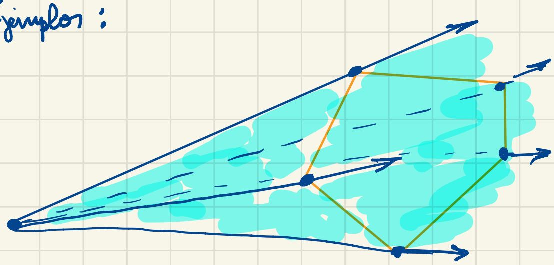
convexo: $u, v \in \sigma \Rightarrow \lambda u + (1-\lambda) v \in \sigma$, $\lambda \in [0,1]$

polihedral: generado por finitos vectores

racional: en N

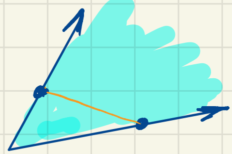
puntiagudo: si $u, -u \in \sigma \Rightarrow u = 0$

Ejemplos:



Cono 3D

Cono 1D



Cono 2D

Considerar el dual de σ:

$$\sigma^\vee := \{ u \in M_{\mathbb{R}} : \underbrace{\langle u, v \rangle}_{\text{prod. punto}} \geq 0 \,,\ \forall v \in \sigma \}$$

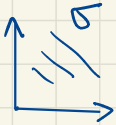
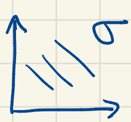
$\therefore$ $\sigma^\vee$ es cono y $S_\sigma := \sigma^\vee \cap M$

es semi-grupo f.g. integral saturado con $S_\sigma^{gp} = M$.

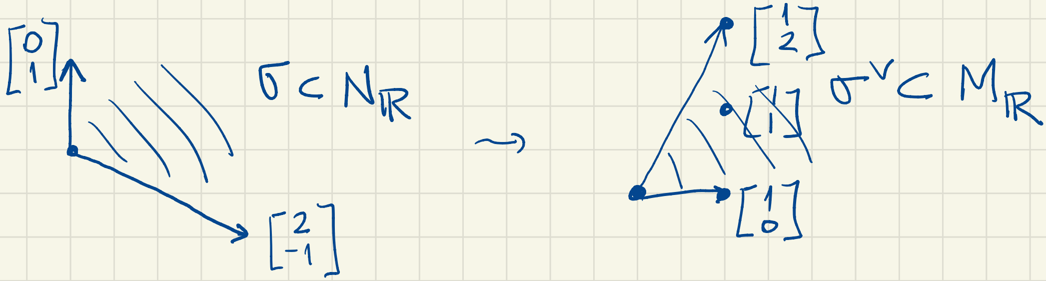
$\therefore$ a partir de σ obtenemos $X_\sigma := X_{S_\sigma}$.

[Supondremos que $\langle \sigma \rangle_{\mathbb{R}} = N_{\mathbb{R}}$, ya que sino $X_\sigma = X_{\sigma'} \times (k^*)^s$]

Ejlo

 $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ $\rightsquigarrow$  $\sigma^\vee \subset M_{\mathbb{R}}$

$$\therefore \quad X_\sigma = k^2$$



$$\Rightarrow \quad X_\sigma \simeq \underbrace{(z^2 = xy) \subset k^3}_{X_{S_2}}$$

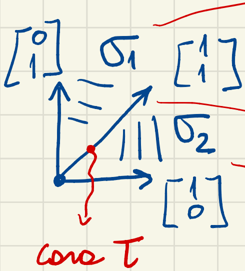
¿Para qué introducir la complicación dual?

Resp: Es para crear variedades más generales a través de una receta muy simple ...

[Una <u>cara</u> de un cono es la intersección de un hiperplano $\ni 0$ con el cono, tal que el cono queda contenido en uno de los mitades definidos por el hiperplano.]

... pegar conos a través de sus caras.

Ejl.-



$$k[S_{\sigma_1}] = k[\overset{=t}{x^{-1}y}, \overset{=s}{x}]$$

$$\cap$$

$$k[S_\tau] = k[x^{-1}y, xy^{-1}, xy]$$

$$\cup$$

$$k[S_{\sigma_2}] = k[\overset{r}{\overset{\shortparallel}{xy^{-1}}}, \underset{=s}{x}]$$

$$k^2 = X_{\sigma_1} \supset \underset{\text{abierto}}{\underset{\parallel}{X_\tau}} \subset X_{\sigma_2} = k^2$$

$$k[\underset{t}{\underset{\parallel}{x^{-1}y}}, \underset{s}{\underset{\parallel}{x}}]_{\underset{t}{\underset{\parallel}{x^{-1}y}}} = k[x^{-1}y, xy^{-1}, xy]$$

El abierto X_τ pega los dos k^2

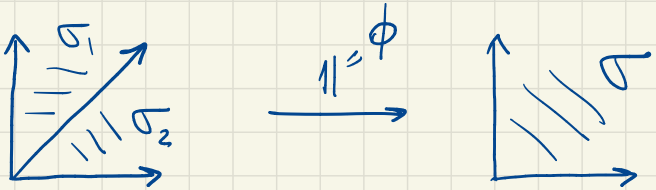
$\Rightarrow$ nueva variedad X_Δ donde

$$\Delta = \{\sigma_1, \sigma_2, \text{ y todos las caras}\}$$

Def. Un abanico Δ es una colección finita de conos en $N_\mathbb{R}$ tales que

(1) Cada cara de un cono en Δ es un cono en Δ.
(2) la intersección de dos conos es cara de ambos.

¿Quién es X_Δ? consideran la identidad



Notar que para cada σ_i tenemos morfismo de semi-grupos dual (identidad también) y así

$$k[\sigma^\vee \cap M] \longrightarrow k[\sigma_i^\vee \cap M]$$
$$\chi^u \mapsto \chi^u$$

y luego al ser compatibles tenemos

$$X_\Delta \longrightarrow X_\sigma = k^2$$

$$\left[\ k[\sigma^\vee \cap M] = k[x,y] \longrightarrow k[\sigma_1^\vee \cap M] = k[\overset{=t}{x^{-1}y}, \overset{=s}{x}] \quad \begin{matrix} x \mapsto s \\ y \mapsto ts \end{matrix}\ \right]$$

¡Es el blow-up de $(0,0) \in k^2$!

Dos cosas logramos:

(1) Dado abanico Δ existe "variedad" X_Δ.

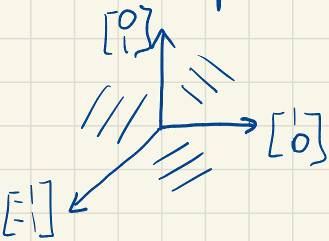
(2) Dado $N' \xrightarrow{\phi} N$ morfismo de grupos y $\Delta' \subset N'_{\mathbb{R}}$, $\Delta \subset N_{\mathbb{R}}$ abanicos tales que $\forall \sigma' \in \Delta'$, $\exists \sigma \in \Delta$ con $\phi(\sigma') \subseteq \sigma$

$\Rightarrow$ existe $X_{\Delta'} \xrightarrow{\tilde{\phi}} X_\Delta$ morfismo de variedades.

<u>Ejercicio</u>: $\tilde{\phi}$ es biracional $\Leftrightarrow$ ϕ es isomorfismo (de grupos)

<u>obs</u>.- Un abanico completo (cubre todo $N_{\mathbb{R}}$) define un X_Δ completo (análogo de

compacto)



$\rightsquigarrow X_\Delta = \mathbb{P}^2_k$

$\rightsquigarrow X_\Delta = \mathbb{P}^1_k$

Si Δ se define a través de los conos del pseudo-cubo

$$\{(\pm 1, \pm 1, \pm 1)\} \cup \{(1,2,3)\} \setminus \{(1,1,1)\}$$

$\Rightarrow$ X_Δ es variedad completa NO proyectiva (ya que $\mathrm{Pic}(X_\Delta) = \{0\}$)

¿Porqué uno se debería interesar en variedades tóricas X_Δ?

§3. Una utilidad: Resolver singularidades.

<u>Teorema</u>: X_σ es suave $\Leftrightarrow$ $X_\sigma \simeq k^n$.

Así un criterio para suavidad es $S \simeq \mathbb{N}^n$.

$\therefore$ Típicamente las variedades X_σ son singulares, y queremos <u>resolución</u>:

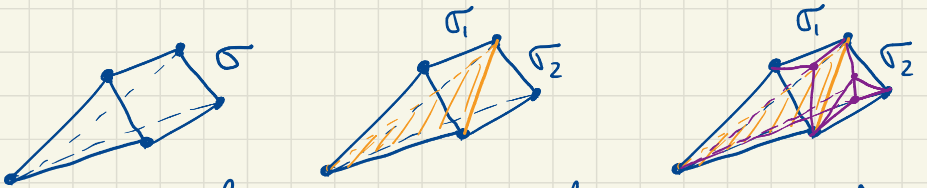
$$\text{var. suave} = X_\Delta \xrightarrow[\text{bir.}]{} X_\sigma$$

<u>Teorema</u> : Dada X_σ (o X_Δ), siempre existe resolución.

[Aquí no importa la característica de $k=\bar{k}$, siempre existe una variedad tórica suave $X_{\Delta'}$ y un morfismo biracional $X_{\Delta'} \to X_\Delta$]

¿Cómo? Simplemente hay que "refinar" el abanico Δ a través de un nuevo abanico Δ' en donde todo cono σ define una X_σ suave! (ie, rayos generadores de σ son base de $\sigma \cap \mathbb{Z}^n$.)

Ejl.-



cono inicial — conos simpliciales — conos resolución

<u>Idea</u> : Dado un cono simplicial σ con generadores primitivos $v_1, \dots, v_n$, la multiplicidad de σ es

$$\mathrm{mult}(\sigma) = \left| \langle \sigma \cap \mathbb{Z}^n \rangle \big/ \langle v_1, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{Z}} \right|$$

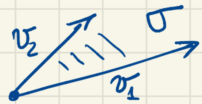
$$\left[\mathrel{\|} \det(a_{ij}) \;,\; v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j \right]$$

y $\operatorname{mult}(\sigma) = 1 \iff X_\sigma$ no singular.

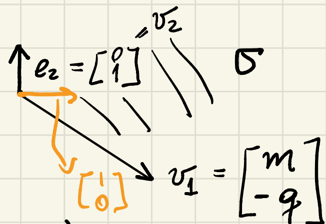
Para una cara $\tau \in \sigma$ tenemos $\operatorname{mult}(\tau) \leq \operatorname{mult}(\sigma)$.

Luego, hacer subdivisiones "estelares" y mostrar que mult decrece estrictamente...

El caso de dim 2 :



- Entonces cambiamos base $v_2 = e_2$ y $v_1 = m e_1 + b e_2$
- Siempre podemos reemplazar e_1 por $e_1 + c e_2$ y así $v_1 = m e_1 + (b - mc) e_2$
- Luego podemos asumir :

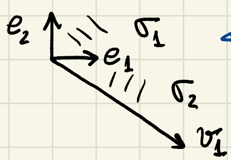


con $0 \leq q < m$ $\quad \operatorname{mcd}(m,q) = 1$

$\updownarrow$ $q \neq 0$

(es saturado)

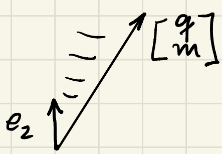
- Si $q = 0 \Rightarrow m = 1$ y $X_\sigma = k^2$.
- Sino



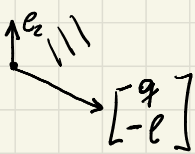
$\longleftrightarrow X_{\sigma_1} = k^2$

$\longleftrightarrow X_{\sigma_2} = ?$

- Rotar



y hacer lo mismo



donde $\ell = e_1 m - q$

para un único $e_1 \geq 2$

$-\ell = m - e_1 q \leq 0 \ (e_1 \geq 2)$

tal que $0 \leq \ell < q$

- Repetir insertando e_1 nuevamente. Notar que en cada paso la coordenada x del nuevo v_1 decrece estrictamente. Así, eventualmente es igual a 1.

$\therefore$ Resolución de singularidades

Este proceso lo codifica la fracción continua de Hirzebruch-Jung:

$$\frac{m}{q} = a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{a_s}}} \qquad \text{donde } e_i \geq 2 \ \forall i$$

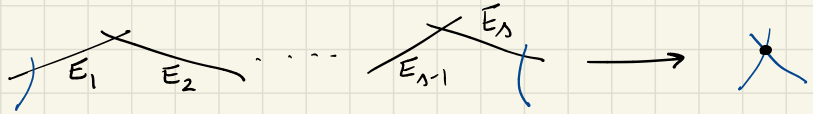
$$\frac{7}{3} = 3 - \frac{2}{3} = 3 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2}}$$

y si $\dfrac{m_i}{q_i} = a_i - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{a_s}}$.

Se puede verificar que si $v_0 := e_2$ y $v_{s+1} := me_1 - qe_2$, entonces resolvemos agregando

$e_1 = v_1, v_2, \ldots, v_s$ donde $a_i v_i = v_{i-1} + v_{i+1}$.

En efecto, $v_0, v_1, \ldots, v_{s+1}$ son los puntos en el convex hull de $(\sigma \cap N) \setminus \{0\}$. La resolución se ve así:

$X_\Delta =$ 

$= X_\sigma$

donde $E_i \simeq \mathbb{P}^1_k$ y $E_i \cdot E_i = -a_i$.

★ Veremos próximamente otra forma de ver X_σ y miraremos más a fondo las fracciones continuas.