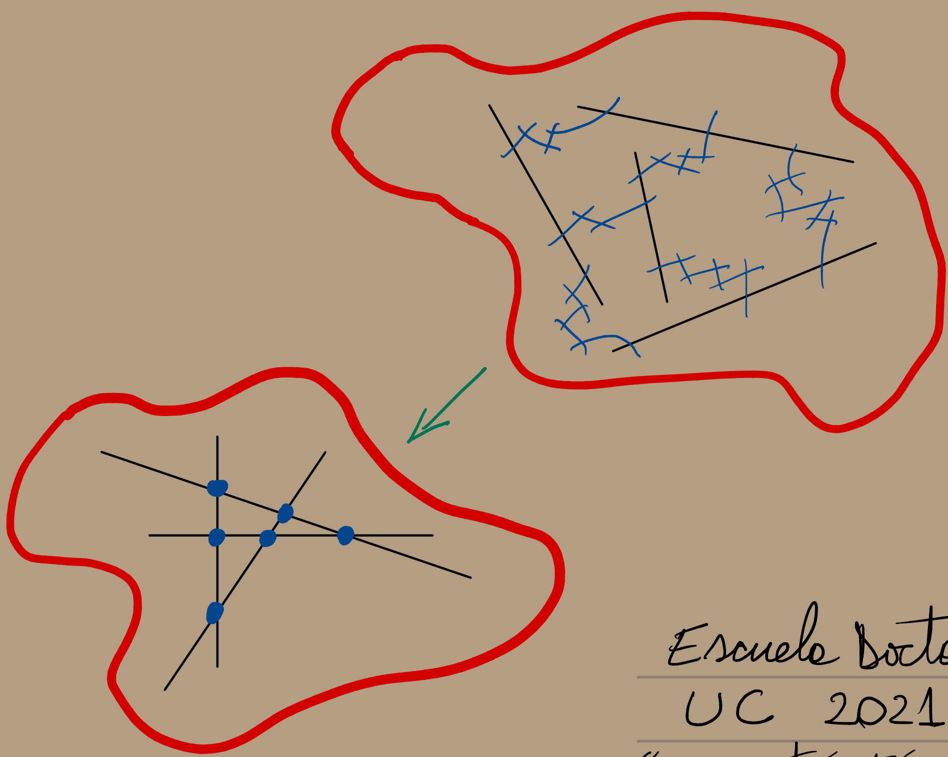


Escuela Doctoral

UC 2021

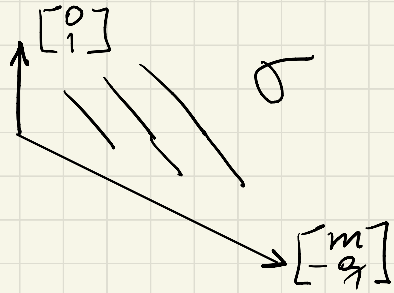
"Geometría tórica"

Parte III

Giancarlo Urzúa

§1 Singularidad cíclica y las sumas de Dedekind.

Tenemos

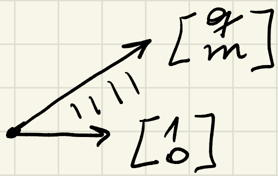


donde $0 < q < m$ son enteros coprimos.

La variedad X_σ es singular.

¿Qué representan m, q en X_σ?

En M (dual) tenemos el cono dual



$\sigma^\vee$ y $S_\sigma = \sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^2$.

Por otro lado, considera $k = \bar{k}$ tal que $\mathrm{char}(k) \nmid m$.

Definir : $k^2 \longrightarrow k^2$, $(x, y) \mapsto (\mu_m x, \mu_m^q y)$

donde $\mu_m^m = 1$ y μ_m es primitiva.

$\therefore$ Tenemos acción de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ en k^2.

$k = \mathbb{C}$, $\mu = e^{\frac{2\pi i}{m}}$

Ej 1.- $(x,y)\mapsto(-x,-y)$ $\quad m=2$, $q=1$

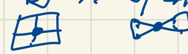
Considero $k[x,y]^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} = k[x^2,y^2,xy] \subseteq k[x,y]$ $\xleftarrow{\alpha} k[a,b,c]$

$\Rightarrow$ generadores x^2, y^2, xy.

$\Rightarrow \langle x^2, y^2, xy\rangle_k = k[x,y]^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$

y así $k[x,y]^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \simeq k[a,b,c]/\overbrace{(c^2-ab)}^{\ker(\alpha)}$

$\therefore \quad k[x,y]^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \subset k[x,y]$ $\qquad k^2 \twoheadrightarrow k^2/\mathbb{Z}/2$



induce $\quad k^2 \longrightarrow k^2/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} := (c^2-ab) \subset k^3$

i.e. $k[x,y]^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$ define el cociente de k^2 por esa acción de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

¡Esto se generaliza y tenemos!

$(x,y)\mapsto(\mu x, \mu^q y) \rightsquigarrow X \simeq k[S_\sigma]$

$S_\sigma \simeq S$ dado por los exponentes de los monomios invariantes por $(x,y)\mapsto(\mu x, \mu^q y)$

$k[x,y]^{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \rightsquigarrow S$

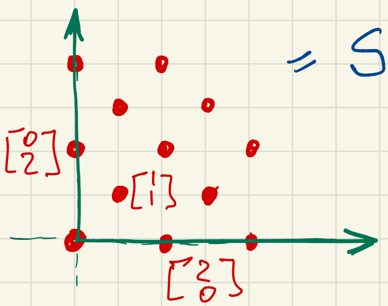
$= k[S]$

Ejercicio: En $\mathbb{Z}^2$

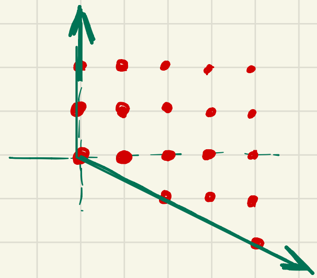
$$S^{gr} = \mathbb{Z}\begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbb{Z}\begin{bmatrix} 0 \\ m \end{bmatrix} + \mathbb{Z}\begin{bmatrix} m-q \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$S = S^{gr} \cap \mathbb{Z}^2_{\geq 0} \text{ y } S \simeq S_\sigma$$

Ejl.- Para $(x,y) \mapsto (-x,-y)$ $\quad m=2 \quad q=1$



$= S \simeq S_\sigma =$



Teo:

(A) $k[x,y]^{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}$ donde $(x,y) \mapsto (\mu x, \mu^q y)$ es una k-álgebra finitamente generada y define $k^2 \longrightarrow k^2/\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

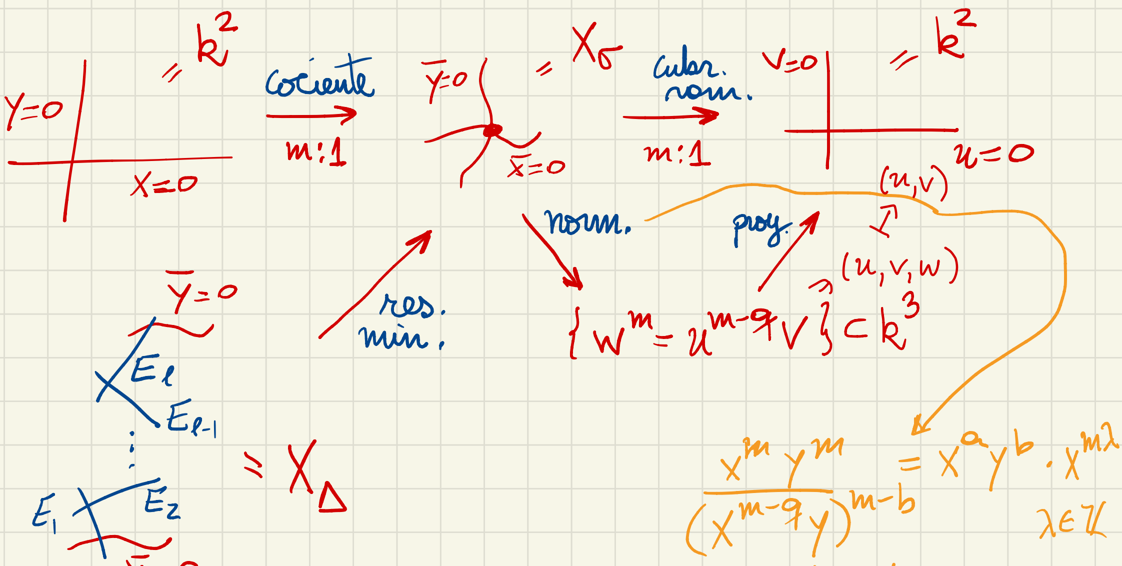
(B) $k[x,y]^{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \simeq k[S_\sigma]$, y así

$$X_\sigma \simeq k^2/\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

Notar lo siguiente:

$$k[x,y] \supset k[x,y]^{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \supset k[\underset{u}{x^m}, \underset{v}{y^m}, \underset{w}{x^{m-q}y}] \supset k[\underset{u}{x^m}, \underset{v}{y^m}]$$

Se traduce geométricamente en:



$$\frac{x^m y^m}{(x^{m-q}y)^{m-b}} = x^a y^b \cdot x^{m\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{Z}$$

donde $a + qb \equiv 0 \ (m)$

donde $E_i \simeq \mathbb{P}^1_k$, $E_i^2 = -a_i$

y $$\frac{m}{q} = a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{a_l}}}, \quad a_i \geq 2.$$

$$\frac{11}{3} = 4 - \frac{1}{3}$$

$$a_1, \ldots, a_\ell \geq 2$$

$$a_1 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{a_\ell}} = \text{rat} > 1$$

$$\mathbb{Q}_{>1} \xleftrightarrow{1-1} [a_1, \ldots, a_\ell]$$

geometría $\rightleftarrows$ aritmética

Def.- Sean $0 < q < m$ enteros coprimos. La <u>suma de Dedekind</u> ← introducida por R. Dedekind [ver función eta de Dedekind $\eta(\tau)$]

asociada a (q,m) es:

$$s(q,m) := \sum_{i=1}^{m-1} \left(\left(\frac{i}{m}\right)\right)\left(\left(\frac{iq}{m}\right)\right)$$

donde $((x)) = x - [x] - \frac{1}{2}$.

$$\left(\frac{i}{m} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{i^2}{m^2} - \frac{i}{m} + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad s(1,m) = \frac{1}{6m} + \frac{m}{12} - \frac{1}{4}$$

En los 70's se reporta acerca de relaciones entre geometría y teoría de Números a través de sumas de esa índole, se presenta como una suerte de enigma en el libro

« The Atiyah-Singer theorem and elementary number theory »

por F. Hirzebruch y D. Zagier.

Ejercicio : $q \cdot q' \equiv 1 \ (m)$

Teorema : (Barkan 1977, Hickerson 1977)

$$\frac{m}{q} = a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{a_\ell}}} \qquad \frac{m}{q'} = a_\ell - \cfrac{1}{a_{\ell-1} - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{a_1}}}$$

$$\Rightarrow \quad 12\, s(q,m) = \frac{q+q'}{m} + \sum_{i=1}^{\ell} (a_i - 2) - \ell$$

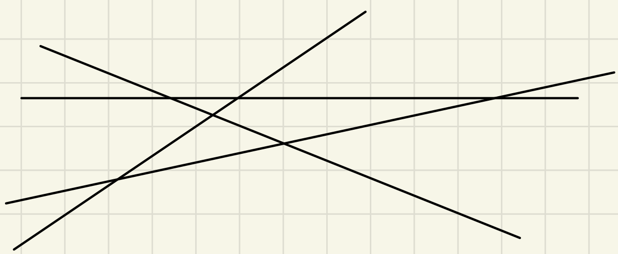
Ej 1.- (Para los fanáticos de singularidades de Wahl)

$$s(na-1, n^2) = \frac{n^2-1}{6n^2}, \quad mcd(n,a) = 1.$$

Meta: Queremos mostrar como el teorema es geometría, y como descubrir más teoremas de la geometría o viceversa.

§2. Cubrimientos ramificados de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ en rectas.

Dato: Sean $\{L_1, \dots, L_r\}$ rectas en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tales que solo forman nodos.



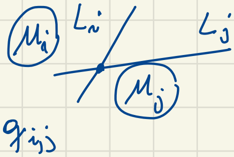
Asignemos multiplicidades $\mu_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que

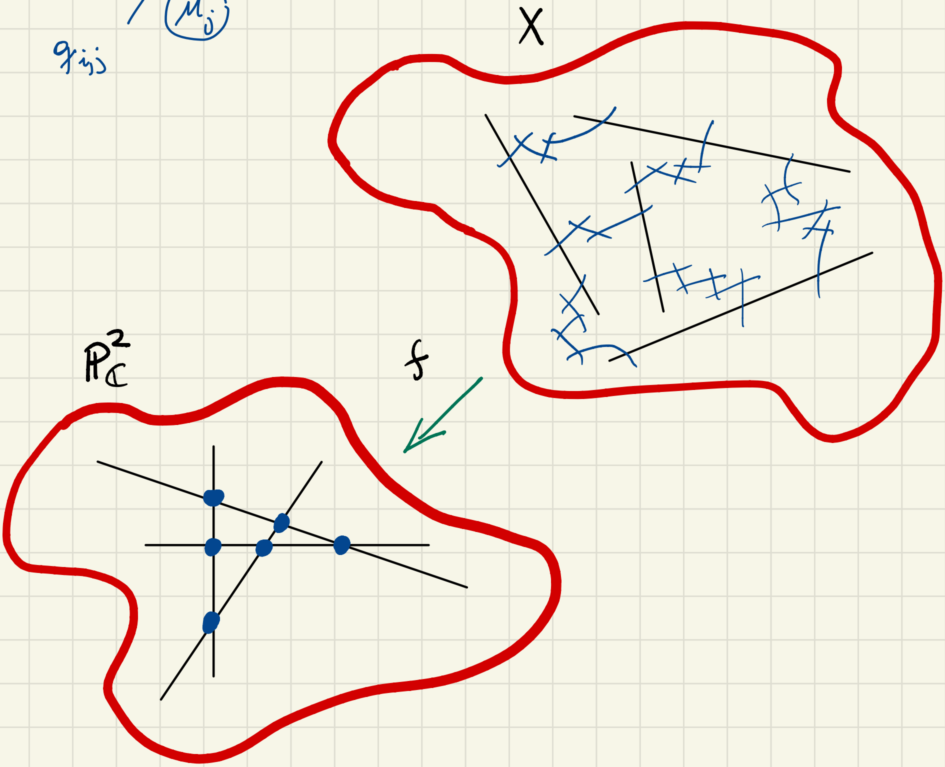
$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r = m$$

con $mcd(\mu_i, m) = 1$ para todo i.

Luego existirá cubrimiento $X \xrightarrow[m:1]{f} \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tal que X es una superficie proyectiva suave y:

- $f^{-1}(p)$ es 1 punto si $p \in L_i$, $p \notin L_j$ $\forall j \neq i$.
- $f^{-1}(p)$ es m puntos si $p \notin L_i$ $\forall i$.
- $f^{-1}(p) = E_1 + \dots + E_{\ell(\mu_i, \mu_j)}$ si $p \in L_i \cap L_j$ como en §1.





La superficie X tiene invariantes fundamentales

$$\chi(\mathcal{O}_X), \quad K_X^2, \quad e(X)$$

caract. de Euler de $\mathcal{O}_X$ — auto-intersección del canónico — caract. de Euler topolo.

los cuales satisfacen la fórmula de Noether (que es una encarnación de Riemann-Roch):

$$12\,\chi(\mathcal{O}_X) = K_X^2 + e(X)$$

Cuando hay singularidades

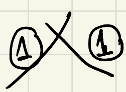
$$s(q_{i,j},m) \qquad \sum a_{i,j} + \frac{q_{i,j}+q'_{i,j}}{m} \qquad \ell(q_{i,j},m)$$

sin singularidades <u>no</u> aparecen.

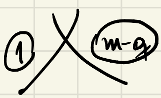
(Juego 1) Fijar $0<q<m$ con $\mathrm{mcd}(q,m)=1$ y

$$\mu_1 = \cdots = \mu_q = 1 \qquad \mu_{q+1} = m-q .$$

Luego



o



$$xy = z^m \qquad\qquad x\,y^{m-q} = z^m$$

$$\Downarrow$$

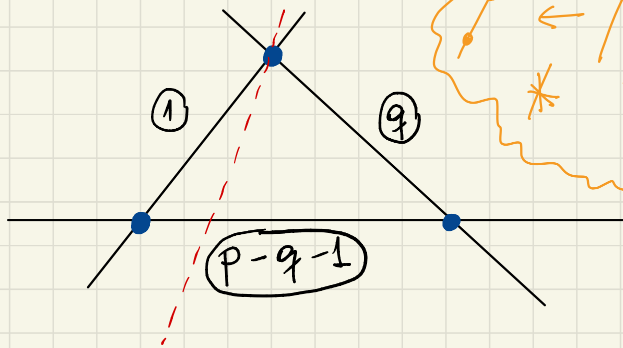
$$\frac{m}{m-1} = 2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{2}}} \qquad \frac{m}{q} = a_1 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{a_\ell}}$$

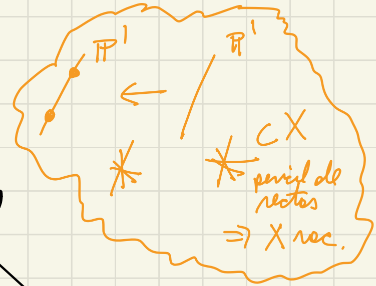
$m-1$ veces

$$s(m-1,m) = \frac{m-1}{6m} - \frac{m-1}{12} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6m} - \frac{m}{12}$$

$\therefore$ evaluar para $\chi(\mathcal{O}_X)$, K_X^2, $e(X)$ $\blacksquare$

(Juego 2)





Luego la superficie X es racional [explicar!]
y así $\chi(\mathcal{O}_X) = 1$.

Eso se traduce en:

$$s(q,m) = s(q+1,m) + s(q'+1,m) + \frac{m-1}{4m}$$

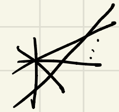
(JUEGO 3) Reciprocidad:

$$s(q,m) + s(m,q) = \frac{1}{12}\left(\frac{m}{q} + \frac{1}{mq} + \frac{q}{m}\right) - \frac{1}{4}$$

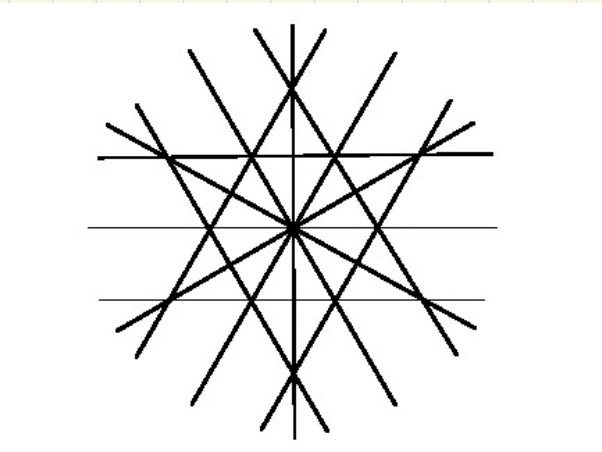
viene de nuevo de la racionalidad de la resolución de $\mathbb{P}(1,m,q)$.

(Juego 4) Aquí subiremos el tono un poco...

Ahora $\{L_1, \dots, L_r\}$ será una configuración de r rectas cualquiera.

No considera: trivial  ni casi trivial .

Ej real $r=12$



Ej complejo $r=9$

$$\{(x^3-y^3)(x^3-z^3)(y^3-z^3)=0\}$$

no es dibujable en pizarra

$$\{x=y,\ x=\omega y,\ x=\omega^2 y,\ x=z,\ x=\omega z,\ x=\omega^2 z,\ y=z,\ y=\omega z,\ y=\omega^2 z\}$$

12 puntos triples

Igual que antes, consideramos particiones

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r = p$$

donde p es primo.

Se construye como antes una superficie X a partir del dato:

$$\mathbb{P}^2 \qquad \{L_1, \dots, L_r\} \qquad \mu_1 + \dots + \mu_r = p$$

Para $(\mathbb{P}^2, \{L_1, \dots, L_r\})$ tenemos invariantes análogos a K^2, e : $\bar{K}^2$, $\bar{e}$.

Los K_X^2, $e(X)$ dependerán de $\bar{K}^2$, $\bar{e}$ y de las correspondientes sumas de Dedekind y fracciones continuas provenientes de las intersecciones de las rectas.

Teorema: Tomando $p \gg 0$ y particiones aleatorias

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r = p$$

existen superficies X_p (simplemente conexas) tales que

$$K_{X_p}^2 / e(X_p) \xrightarrow[p \to \infty]{} \bar{K}^2 / \bar{e} \, .$$

En efecto X_p puede no ser minimal, pero X_p^{min} satisface el mismo resultado.

Parte de la demostración pasa por mostrar que existe un conjunto pequeño (con respecto a p) de particiones cuyas multiplicidades producen sumas de Dedekind y fracciones continuas que contribuyen. Eso pasa por entender sus valores precisos.

Mirar trabajos de K. Giustmaier
Mirar paper «Chern slopes of surfaces of general type in positive characteristic» •••