H. Postén I : Aprox. diofantina **I** 16/08/18 (1)

Meta: Entender el método del subespacio.

§1. Teoría clásica (4): Intro, Teo. de THOE, alturas, var abel & curvas.
§2. Teo. del subespacio (3-4): Teo. subespacios Teo. Vojta, curvas de nuevo, Rec
§3. Aplicaciones (∞)

• (Dirichlet): Sea $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow$ existen infinitos $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $(p,q)=1$ $q>0$ tal que $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}$.

Dem: $\alpha \notin \mathbb{Q}$, parte frac de $n\alpha = \{n\alpha\}$ $(n=1,2,\dots)$ son todos distintos (ya que $\alpha \notin \mathbb{Q}$). Sea $N \geq 1$, existen $0 \leq k < n \leq N$ tal que $|\{k\alpha\} - \{n\alpha\}| < \frac{1}{N}$. Tomar $q = n-k$, $p = \lfloor n\alpha \rfloor - \lfloor k\alpha \rfloor$

$$|p - q\alpha| = |\{n\alpha\} - \{k\alpha\}| \leq \frac{1}{N} \leq \frac{1}{q} \quad \blacksquare$$

• (Liouville): Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ algebraico de grado $d \geq 2$. Entonces existe $c(\alpha) > 0$ tal que $\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ con $(p,q)=1$, $q>0$ se tiene que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c(\alpha)}{q^d}.$$

Dem: (4 pasos)

1. Construcción de polinomio auxiliar que se anula en el blanco.
   $F(x) = (\text{polinomio min. de } \alpha) \in \mathbb{Z}[x]$.
2. No anulamiento en las aproximaciones. F irred sobre $\mathbb{Q}$ y así sin raíces en $\mathbb{Q}$.
3. Cota superior. Solo consideramos $\frac{p}{q}$ buena aprox de α $\left|\frac{p}{q} - \alpha\right|$ es minimal entre las raíces de F.

$$\left|F\left(\tfrac{p}{q}\right)\right| \leq \left|\frac{p}{q} - \alpha\right| \cdot M_F \qquad M_F > 0 \text{ indep. de } \frac{p}{q}.$$

4. Cota superior

(2) $\Rightarrow$ $F(p/q) \neq 0$ y denom de $F(\frac{p}{q})$ divide a q^d

$$|F(\tfrac{p}{q})| \geq \frac{1}{q^d}$$

$\therefore$ (3) + (4) $\Rightarrow$ Teorema ∎

Ej 1.- $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{10^{n!}} = \lambda \in \mathbb{R}$. No es algebraico ie es trascendente.

Teo. de THUE : $\alpha \in \mathbb{C}$ algebraico de grado $d \geq 2$. Sea $\varepsilon > 0$. Existe una constante $c(\alpha, \varepsilon) > 0$ tal que $\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $(p,q)=1$, $q>0$ se tiene

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c(\alpha,\varepsilon)}{q^{1+\frac{d}{2}+\varepsilon}}$$

Liouville : d , Thue : $1+\frac{d}{2}+\varepsilon$, Siegel : $\approx 2\sqrt{d}+\varepsilon$, Dyson/Gelfond $\sqrt{2d}+\varepsilon$.
Roth : $2+\varepsilon$

Teo (Thue) : Sea $H(x,y) \in \mathbb{Z}[x,y]$ homog. irred. de grado $d \geq 3$. Sea $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Entonces la ecuación $H(x,y)=c$ tiene a lo más finitas soluciones enteras.

Ej (demostración sigue de esto) $x^d - 2y^d = 1$

$$\therefore \quad x^d - 2y^d = \prod_{\varepsilon^d=1} \left(\frac{x}{y} - \sqrt[d]{2}\,\varepsilon\right) = \frac{1}{y^d}$$

$\therefore$ Infinitas soluciones $\Rightarrow$ ∞ aprox. de la forma $\left|\sqrt[d]{2} - \frac{x}{y}\right| < \frac{K}{y^d}$ lo que es contradicción para $d \geq 3$.
$d=2$ es ecuac. de Pell con ∞ soluciones.

$(3+2\sqrt{2})^n = A_n + B_n\sqrt{2}$ $\therefore$ Prop : (A_n, B_n) es solución.

Alturas. K cuerpo de #, $M_K = M_K^0 \cup M_K^\infty$ lugares.

Ejlr $M_\mathbb{Q} = \{\text{primos}\} \cup \{\infty\}$, M_K^∞ Arquimediano $|\cdot|$, $\mathbb{C}$, $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$

$\phantom{Ejlr M_\mathbb{Q} = \{} \updownarrow \qquad\quad \updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ reales $\quad$ no reales

$\phantom{Ejlr M_\mathbb{Q} = \{} |\cdot|_p \qquad | \ | \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ r_1 $\quad$ $2r_2$

$$v \in M_K, \quad \alpha \in K^* \qquad \|\alpha\|_v = \begin{cases} N_{\mathfrak{P}}^{-\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\alpha)} & \text{si } v \longleftrightarrow \mathfrak{P} \\ |\sigma_v(\alpha)| & \text{si } v \text{ es real} \\ |\sigma_v(\alpha)|^2 & \text{si } v \text{ no real} \end{cases}$$

$$h_K : \mathbb{P}^n(K) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \qquad h_K([a_0, \dots, a_n]) = \sum_v \log \max_{0 \leq j \leq n} \|a_j\|_v$$

Hecho: $\prod_v \|\alpha\|_v = 1$, $\forall \alpha \in K^*$.

Ejlr $K = \mathbb{Q}$, $n = 1$, $\mathbb{Q} = \{[p, q] : q \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$.

$$h_\mathbb{Q}([p, q]) = \log \max\{|p|, |q|\}. \qquad (p, q) = 1$$

Dem: $\displaystyle\sum_v \log \max\{\|p\|_v, \|q\|_v\} = \sum_{r \text{ primo}} \log \overset{=1}{\boxed{\max\{|p|_r, |q|_r\}}} + \log \max\{|p|, |q|\}.$