15/Nov/2018

Ejemplos y problemas sobre puntos enteros en superficies (GAN)

Teo [Corvaja-Zannier 2004]: $\tilde{X} \supset D_1 \cup \cdots \cup D_r \,|_K$ curvas irreducibles distintas. Asumir existen enteros positivos $p_1, p_2, \ldots, p_r$ tales que:

- $D = p_1 D_1 + \cdots + p_r D_r$ es big y nef (ie $D^2 > 0$ y $D.\Gamma \geq 0$ $\forall \Gamma$ curve)
- No existe punto común a tres componentes de D.
- Para cada i, sea ξ la solución positiva real minimal de
  $$D_i^2 \xi^2 - 2 D.D_i \cdot \xi + D^2 = 0 \quad \text{[Existe por teo índice de Hodge]}$$
  Se Requiere $\quad 2\xi D^2 > D.D_i \xi^2 + 3 p_i D^2$.

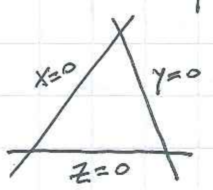
Entonces $X(\mathcal{O}_S)$ no es Zariski denso.

Cor (Teo. de Siegel) $\tilde{C}$ = curva proy nosing $|_K$ y $p_1, \ldots, p_s$ K-puntos dist. Si $s \geq 3 \Rightarrow C(\mathcal{O}_S)$ es finito, donde $C = \tilde{C} \setminus \{p_1, \ldots, p_s\}$.

Dem: Considerar $\tilde{X} = \tilde{C} \times \tilde{C}$ y $D_1, \ldots, D_s$ fibras sobre $p_1, \ldots, p_s$ verticales y $D_{s+1}, \ldots, D_{2s}$ horizontales. Usaremos C-Z con $p_1 = \cdots = p_{2s} = 1 \Rightarrow D = \sum_{i=1}^{2s} D_i$ es big y nef. Para mirar ξ basta con un D_i. Tenemos $D^2 = 2 \cdot s^2$ y $D_i^2 = 0$ y $D_i \cdot D = s$
$\Rightarrow -2s\xi + 2s^2 \Rightarrow \xi = s$ y $2 \cdot s \cdot 2s^2 > s \cdot s^2 + 3 2 s^2 \Rightarrow s > 2$.
$\Rightarrow X(\mathcal{O}_S)$ no es Zariski denso. Luego C contiene finitos S-puntos [sino fácilmente a través de secciones obtenemos que $X(\mathcal{O}_S)$ es Zariski denso]

obs: Corolario es sobre un complemento amplio en una curva (y con grado ≥ 3). Para superficies un complemento amplio no basta (ni de "grado" alto) Por ejemplo dado $H \subset S$ curva amplia irreducible $C S N$ y $p_1 = m > 0 \Rightarrow$
$$H^2 \xi^2 - 2m H^2 \xi + m^2 H^2 = 0 \Rightarrow \xi = m \Rightarrow 2m^3 H^2 > m^3 H^2 + 3 m^3 H^2 \rightarrow\leftarrow$$
Pero al aumentar el # de componentes esto tiende a funcionar...

Ej1 - Mirar explícitamente rectas en $\mathbb{P}^2_K$. Por ejemplo:



Si $S = \{\infty, 2\}$ con $K = \mathbb{Q} \Rightarrow y = 2^b x$ y puntos $[2^a, 2^{b+a}, 1]$ dan ∞ K-rectas con ∞ $\mathcal{O}_S$-puntos $\Rightarrow X(\mathcal{O}_S)$ es Zariski denso.

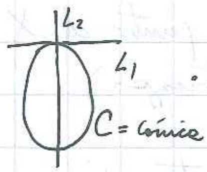
y $x, y \in \mathcal{O}_S^*$

y así para 1 y 2 rectas.

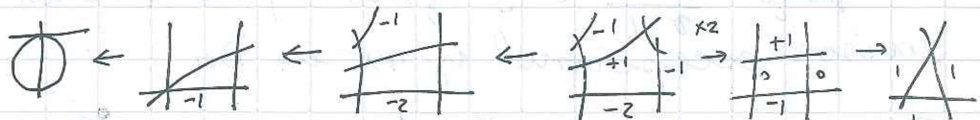
Tomar 3 rectas concurrentes SPG $x=0, y=0, x=y$. Sea K cuerpo #s y S como siempre. Sea $[x,y,z]$ S-puntos, asumir coord en $\mathcal{O}_K$.
Luego tenemos $x-y \notin \mathfrak{m}_p$ $\forall p \notin S$ $\Rightarrow$ $x-y \in \mathcal{O}_S^*$ $\Rightarrow$ $\exists\, u(x,y) \in \mathcal{O}_S^*$ tal que $u(x,y)x - u(x,y)y = 1$. Como ecuación S-unidades tiene finitas soluciones $\Rightarrow$ $\exists\, A_1,\dots,A_r, B_1,\dots,B_r$ tal que dado $[x,y,z] \in X(\mathcal{O}_S)$, $\exists\, A_j, B_j$ con $B_j x - A_j y = 0$ $\Rightarrow$ $X(\mathcal{O}_S) \subset$ unión finita de rectas, ie, no es Zariski denso.

Por otro lado, $\tilde{X} \setminus (D_1 \cup \dots \cup D_s)$ no Zariski denso $\Rightarrow$ $\tilde{X} \setminus (D_1 \cup \dots \cup D_s \cup \dots \cup D_{r+s})$ no Zariski denso.

$\therefore$ El complemento de rectas en $\mathbb{P}^2$ es (eventualmente) Zariski denso $\Leftrightarrow$  .

Ej1.- Considerar 

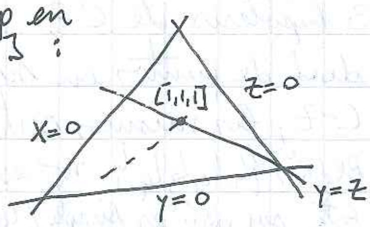
. Notar que $aL_1 + bL_2 + cC$ no satisface C-Z en lo numérico a pesar de ser muy amplio.

Por otro lado: 

y así complemento es $\simeq$ compl. de A $\Rightarrow$ eventualmente Zariski denso.
Notar que conj. de Vojta no funciona aquí por lo de SNC.

Obs: Notar que un conjunto en una variedad tal que ∞ curvas distintas contienen c/u ∞ puntos $\Rightarrow$ Zariski denso ($Z \cdot C = \infty \Rightarrow C \subset Z \Rightarrow \infty\, C \subset Z$)

Ej.- [Carta personal de P. Corvaja Nov-2018] Considerar $\mathbb{P}^2$ y su blow-up en $[1,1,1]$:



Sean D_1, D_2, D_3 rectas $x=0, y=0, z=0$ y D_4 = transf. estricta de $y=z$

Tomar $D = p(D_1 + D_2 + D_3) + D_4$ con $p \gg 0$ a elegir.

$\Rightarrow D.D_i = 3p+1 \quad i=1,2,3 \quad D.D_4 = 3p \quad D^2 = 9p^2+6p$

Con $\underbrace{D_1, D_2, D_3 \quad \eta = 3p}_{\text{cond} \checkmark}$ con $\underbrace{D_4 \quad \eta = \frac{3p+2}{2}}_{\text{cond} \checkmark \text{ si } p \gg 0}$

D es por supuesto big & nef $[D^2 > 0$ y $D \cdot \Gamma \geq 0 \ \forall$ curva$]$.

Por dem. $X := \tilde{X} \setminus (D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4)$ puede ser Zariski denso.

Tomar S tal que $\mathcal{O}_S^*$ son ∞.

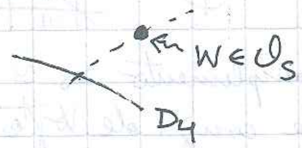
- En compl. del $\triangle$, $[x,y,z]$ entero $\Leftrightarrow \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \in \mathcal{O}_S^*$.
- Tomar $[v^n, v, 1]$ con $v \in \mathcal{O}_S^*$ y $n > 0$ entero.

(a) Si $v - 1 \notin m_p$ para $p \notin S \Rightarrow$ es S punto de X

(b) Si $\underset{p \notin S}{v-1 \in m_p} \Rightarrow v^n - 1 \in m_p$ (factorizar)

Pero luego $\frac{v^n - 1}{v-1} \in \mathcal{O}_S$ y así el punto vive en el divisor excepcional y no en D_4

Blow-up : $W = \dfrac{\frac{x}{z} - 1}{\frac{y}{z} - 1}$



ie se evitó el polo en D_4.

(c) Como hay ∞ curvas distintas $y^n = xz^{n-1}$ e $v \in \mathcal{O}_S^*$ $\Rightarrow X(\mathcal{O}_S)$ es Zariski denso.

obs:- Este ejemplo satisface 2 de las 3 hipótesis de C-Z.

no existen métodos!

$\boxed{\text{obs}}$- Hay varios resultados sobre densidad de puntos en sup. usando C-Z. Por ejemplo en una secuela de C-Z, los mismos autores muestran que

$= Bl_3(\mathbb{P}^2)$ y $X := Bl_3(\mathbb{P}^2) \setminus \{L_1, L_2, L_3, L_4\}$ no es Zariski denso y este sup aún es simplem. conexo!

$\boxed{\text{Probl}}$: Encontrar superficie proyectiva $\tilde{X}$ simplemente conexa donde podemos verificar la conjetura de Vojta: $K_{\tilde{X}}$ big $\Rightarrow$ K-puntos no son Zariski densos $\forall K$ cuerpo #s.