IV

Teorema de Mordell-Weil.

K cuerpo de #s, $A|_K$ var. abeliana.
Mostraremos que $A(K)$ es abeliano f.g..

<u>Teo</u> (Chevalley-Weil) $X \xrightarrow{\pi} Y$ morfismo$/_K$ finito étale de var. proyectivas.
Existe $S \subseteq M_K$ finito tal que: "sea $F|_K$ ext. finita, sea $p \in Y(F)$.
Entonces hay ext. $L/_F$ de grado $d \leq \deg \pi$ y $Q \in X(L)$ tq $\pi(Q) = P$
y $L/_F$ es no ramificado fuera de los lugares de S.

<u>Teo</u> (Mordell-Weil débil): Sea K = cuerpo de #s, sea $A|_K$ var. ab.,
$\Gamma := A(K)$ y $n \geq 1$. Entonces $\Gamma/n\Gamma$ es finito.
[Asumiendo $A[n] \subseteq A(K)$]

<u>Dem</u>: Consideremos $[n]: A \to A$ es finito, étale, de grado $d = n^{2g}$.
Por C-W, para cada $p \in \Gamma$, $\exists L_p|K$ de grado $\leq n^{2g}$ y $Q_p \in A(L_p)$
tal que $n Q_p = P$ y que cumple que para $S \leq M_K$ finito los
cuerpos L_p son no ramificados fuera de S.
Usamos el Teo. de Hermite-Minkowski «$\{L|_K : [L:K] \leq B_1$,
primos que ramifican en L tienen norma $B_2\}$ es finito».
$\therefore$ Obtenemos que $\{L_p : P \in \Gamma\}$ es finito. Sea <u>$L|_K$ ext. de Galois finita</u> que contiene L_p, $\forall p$.
Sea $G = Gal(L/K)$, Consideremos $Mor(G, A[n])$, el cual
es finito.
Idea: Se construirá $\delta : \Gamma/n\Gamma \hookrightarrow Mor(G, A[n])$.
Definimos $\tilde{\delta} : \Gamma \longrightarrow Mor(G, A[n])$

$$P \mapsto \tilde{\delta}(p) : G \to A[n]$$
$$\sigma \mapsto \underset{\sigma(Q_p)}{\overset{\|}{Q_p^{\sigma}}} - Q_p$$

$\tilde{\delta}(P)$ no dep. de Q_P : Sean $Q_P, \overline{Q}_P \in \pi^{-1}(P)$. Se tiene $nQ_P = n\overline{Q}_P = P$ así que $\exists T \in A[n]$, $Q_P - \overline{Q}_P = T$.

De aquí $Q_P^\sigma - Q_P = \overline{Q}_P^\sigma - Q_P$ es bien definida.

$\tilde{\delta}(P)(\sigma) \in A[n]$, $n(Q_P^\sigma - Q_P) = (nQ_P)^\sigma - nQ_P = P^\sigma - P = 0$

$\tilde{\delta}(P)$ morfismo

$\cancel{\tilde{\delta}(P)(\sigma_1\sigma_2) = Q_P^{\sigma_1\sigma_2} - Q_P = Q_P^{\sigma_1\sigma_2} - Q_P^{\sigma_2} + Q_P^{\sigma_2} - Q_P}$

$\cancel{= (Q_P^{\sigma_1} - Q_P)^{\sigma_2} + (Q_P^{\sigma_2} - Q_P)}$

Si $nQ_{P_1} = P_1$, $nQ_{P_2} = P_2$ se tiene $n(Q_{P_1} + Q_{P_2}) = P_1 + P_2$

$\therefore \quad Q_{P_1+P_2} = Q_{P_1} + Q_{P_2}$

$\tilde{\delta}$ morfismo :

$\tilde{\delta}(P_1+P_2)(\sigma) = (Q_{P_1} + Q_{P_2})^\sigma - (Q_{P_1} + Q_{P_2})$

$= \tilde{\delta}(P_1)(\sigma) + \tilde{\delta}(P_2)(\sigma)$

* $n\Gamma \subseteq \ker(\tilde{\delta})$. Sea $P = nR$, $R \in \Gamma$ $\exists T \in A[n]$ tal que $T + R = Q_P$, así que

$\tilde{\delta}(P)(\sigma) = Q_P^\sigma - Q_P = R^\sigma - R = 0$,

$\Rightarrow \tilde{\delta}$ se factoriza a través de $\Gamma/n\Gamma$ $\Rightarrow \exists \delta : \Gamma/n\Gamma \to \mathrm{Mor}(G, A[n])$

* δ iny : Sea $P \in \ker \delta$, Se tiene $\delta(P) = \tilde{\delta}(P) =$ nula entonces $\forall \sigma \in G$, $Q_P^\sigma - Q_P = 0$, $Q_P \in A(K)$ $\forall P \in n\Gamma$ ◆

<u>T(Mordell-Weil)</u>: Sea $K =$ cuerpo de $\#$, $A|_K$ var ab.

$\Rightarrow$ $A(K)$ es fin. gen. .

<u>Dem</u>: Extendemos finitamente K para tener $A[2] \subseteq A(K) =: \Gamma$

Por M-W debil, $\Gamma/2\Gamma$ es finito.

Elegimos $\mathcal{L}$ en A amplio y simétrico. (eg $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \otimes [-1]^*\mathcal{L}_0$)

Demostraremos MW usando descenso.

Sean $P_1, \dots, P_m \in \Gamma$ repr. de $\Gamma/2\Gamma$.

Definimos $\mathcal{G} = \{ P \in \Gamma : \hat{h}_{\mathcal{L}}(P) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \hat{h}(P_i) \} \subseteq \Gamma$.

Como $\mathcal{L}$ es <u>amplio</u>, por Northcott $\mathcal{G}$ es finito

Demostraremos $\Gamma = \langle \mathcal{G} \rangle$

Demostraremos $\Gamma = \langle \mathcal{G} \rangle$, así que será f.g.

Si $\Gamma \neq \langle \mathcal{G} \rangle$, existe $P \in \Gamma \setminus \langle \mathcal{G} \rangle$ de altura minimal.

Se tiene $P = 2Q + P_j$, con $Q \in \Gamma \setminus \langle \mathcal{G} \rangle$

fórmulas de Mumford $\rightsquigarrow$ Tenemos $4\hat{h}(Q) = \hat{h}(2Q) = \hat{h}(P - P_j) \leq 2\hat{h}(P) + 2\hat{h}(P_j)$ (paral.)

$$< 4\hat{h}(P) \quad \rightarrow\leftarrow$$

$\therefore \ \Gamma = \langle \mathcal{G} \rangle$ ■

$$0 \to \Gamma/n\Gamma \to \mathrm{Sel}_n(A/K) \to Ш[n] \to 0$$

No ejemplo de Ch-W: $\mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1 \quad x \mapsto x^2$.

$L_q = \mathbb{Q}(\sqrt{q})$ too much.