Teorema de Siegel (Ricardo Menares)

K = cuerpo de #s

$S \subset M_K$ un conjunto finito de lugares conteniendo los noarquimedianos.

$C/_K$ curva proy. suave $g(C) \geq 1$

<u>Teo</u>: Sea $f \in K(C) \setminus K \Rightarrow \{ P \in C(K) : f(P) \in \mathcal{O}_{K,S} \}$ es finito.

$\left[\mathcal{O}_{K,S} = \{ \alpha \in K : \forall v \notin S, \ \|\alpha\|_v \leq 1 \} \quad S\text{-enteros} \right]$.

Ej.: $C: y^2 = x^3 + 1$, $f = x$; $K = \mathbb{Q}$, $S = \{\infty\}$ $\mathcal{O}_{K,S} = \mathbb{Z}$

$\{ (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (*) \}$ es finito.

<u>Prop.</u>: $C/_K$ curva suave, proy.

(a) $D, E \in \mathrm{Div}(C)$, $\deg D \geq 1$
$$\lim_{\substack{P \in C(\bar{K}) \\ h_D(P) \to \infty}} \frac{h_E(P)}{h_D(P)} = \frac{\deg E}{\deg D}.$$

(b) $f, g \in K(C)$; f no const,
$$\lim_{\substack{P \in C(\bar{K}) \\ h(f(P)) \to \infty}} \frac{h(g(P))}{h(f(P))} = \frac{\deg g}{\deg f}.$$

<u>dem</u>: (a) $d = \deg D$, $e = \deg E$

$n \in \mathbb{Z}$; $A_n = n(\underbrace{eD - dE}_{\deg 0}) + D$ $\quad \deg A_n = \deg D \geq 1$

A_n amplio $\Rightarrow h_{A_n} \geq O(1) =: -K(D,E,n)$.

$h_{A_n}(P) = n(e h_D(P) - d h_E(P)) + h_D(P) + O(1)$.

$$n \geq 0 \Rightarrow n\left(\frac{e}{d} - \frac{h_E(P)}{h_D(P)}\right) + \frac{1}{d} \geq \frac{-K(D,E,n)}{d \cdot h_D(P)}$$

$$\Rightarrow \underline{\lim}_{h_D(P) \to \infty} \left(\frac{e}{d} - \frac{h_E(P)}{h_D(P)} \right) \geq \frac{-1}{n \cdot d} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

reemplazar n por $-n$ $\Rightarrow$ ≥ 0 $\Rightarrow$ $= 0$ $\blacksquare$

(b) $\operatorname{div} f = \underset{\geq 0}{D'} - \underset{\geq 0}{D}$; $\deg D \geq 1$ $\quad \operatorname{div} g = E' - E$

$D = f^*(\infty)$ $\quad h_D = h \circ f + O(1)$ $\quad h_E = h \circ g + O(1)$

$\Rightarrow$ se reduce a (a) ■

Prop: $t \in K(C)$ definida y no ramificada en $|\operatorname{div} f|$. Suponer $g(C) \geq 1$.
Sea $\rho > 0 \Rightarrow \exists\, c = c(f, t, \rho, \cancel{\varepsilon}, S) > 0$ tal que

$$\prod_{v \in S} \min\{\|f(p)\|_v, 1\} \geq \frac{c}{H_K(t(p))^{\rho}}, \quad \forall p \in C(K).$$

Roth plano $\Rightarrow \rho = es(2+\varepsilon)$, $s = \# S$, $e = \max\{\text{orden de cero de } f\}$.

Idea: mejorar con cubrimiento.

Por contradicción: $\exists\, c > 0$, suces. genérica $(P_m) \subseteq C(K)$

(*) $\quad H_K(t(P_m))^{\rho} \cdot \prod_{v \in S} \min\{\|f(p)\|_v, 1\} \leq c.$

$\boxed{\phi : C' \to C \text{ cubrim. no ramificado}}$ $m \in \mathbb{N}$, $\quad j : C \to \operatorname{Jac}(C) = J$
$\qquad P \mapsto P - P_0$

Mord. Weil ~~[illegible]~~ débil $\Rightarrow J/mJ(K)$ es finito. Pasando a subsec.
$P_n = mP_n' + R$, $R \in J(K)$, $\quad \Phi : J \to J \quad x \mapsto [m]x + R$.

$$\begin{array}{ccc} C' & \overset{j'}{\hookrightarrow} & J \\ \downarrow \phi & & \downarrow \Phi \\ C & \overset{j}{\hookrightarrow} & J \end{array} \qquad \phi := \Phi|_{C'}.$$

$t' \in K(C')$. Ya sabemos: $H_K(t(\Phi(p'))) \geq \kappa_m H_K(t'(p'))^{\frac{m^2}{2}}$
$\kappa_m > 0$, $\forall p' \in C'(K)$.

Por (*) $\quad c \geq H_K(t(\phi(P_m')))^{\rho} \cdot \prod_{v \in S} \min\{\|f \circ \phi(p')\|, 1\} \geq \kappa_m H_K(t'(P_n'))^{\rho\frac{m^2}{2}} \cdot$ $\quad c' H_K(t'(P_m'))^{-(2+\varepsilon)s\, \overset{e}{\widetilde{e(f\circ\phi)}}}$

Roth plano.

$\Rightarrow \exists\, c_m$, $\quad c_m \geq H_K(\underbrace{t'(P_n')}_{\in K})^{\rho\frac{m^2}{2} - (2+\varepsilon)se}$

Por Northcott: $H_K(t'(P_n'))_n$ es no acotada.

$\Rightarrow$ exponente debe ser negativo $\frac{\rho m^2}{2} - (2+\varepsilon)se \leq 0$
y no es cierto si $m \gg 0$.

Dem (Teo. de Siegel). Por contradicción: Asumir que $\{p \in C(K) : f(p) \in \mathcal{O}_{K,S}\}$ es infinito. Sea $t \in K(C)$ definido y no ramificado en $|\mathrm{div} f|$.
Elegimos $\rho \in (0, \deg f / 2\deg t)$.
Aplicamos resultado anterior con $1/f \Rightarrow \exists C_1 > 0$

$$\prod_{v \in S} \min\left\{\frac{1}{\|f(p)\|_v}, 1\right\} \geq \frac{C_1}{H_K(t(p))^{\rho}}, \quad \forall p \in C(K).$$

$$\Leftrightarrow \quad H_K(t(p))^{\rho} \geq C_1 \underbrace{\prod_{v \in S} \max\{\|f(p)\|_v, 1\}}_{\substack{\| \\ H_K(f(p))}} \quad \text{si } f(p) \in \mathcal{O}_{K,S}.$$

con $h = \frac{\log H_K}{[K:\mathbb{Q}]}$, $\quad \Updownarrow \quad \rho\, h(t(p)) \geq h(f(p)) - C_2$

$$\Leftrightarrow \quad \rho \geq h(f(p))/h(t(p)) - \frac{C_2}{h(t(p))}$$

Tomando $h(t(p)) \to \infty$ $\quad \rho \geq \frac{\deg f}{\deg t} \quad \rightarrow\leftarrow$ ■

Teo (Ec. S-unidad / Siegel en $\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$)
Sea K = cuerpo #, $S \subseteq M_K$ finito ($M_K^\infty \subseteq S$)
$\Rightarrow$ la ecuación $u + v = 1$ $(+)$ tiene solo finitas sol's en $\mathcal{O}_{K,S}^\times$.

[Recuerdo rango $(\mathcal{O}_{K,S}^\times)$ es finito]

Dem: $(K = \mathbb{Q})$ $\quad S = \{\infty, p_1, \dots, p_r\}$ $\therefore$ $\mathcal{O}_{K,S}^\times = \{\pm p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r} ; \alpha_j \in \mathbb{Z}\}$

Mirar $Ax^4 + By^4 = 1$ $(*)$ con $A, B \in \mathcal{O}_{K,S}^\times$ todas las posibilidades con respectivos α_j que cumplen $0 \leq \alpha_j \leq 3$.
$\Rightarrow$ finitas versiones de $(*)$: $g_* = 3$.
hay $2 \cdot 4^r$ curvas $(*)$, de genero 3.
obs: Toda solución de $(+)$ en $\mathcal{O}_{K,S}^\times$ corresp. a solución $(*)$ en $\mathcal{O}_{K,S}^\times$
$\therefore$ Aplicar Siegel para $(*)$ para $\mathcal{O}_{K,S}$ ■