Fernando F. 18/oct/18 (1)

Método C-Z para probar Siegel.

Teo (Siegel): K = cuerpo #s, $S \supset$ arch, S conj finito lugares.
$\overline{C} \subseteq \mathbb{P}^m$, $C \subseteq \mathbb{A}^m_K$

Si $\overline{C} \setminus C$ son ≥ 3 ptos $\Rightarrow$ $C \cap \mathbb{A}^m(\mathcal{O}_{K,S})$ son finitos.

Dem: Suponer $\overline{C} \setminus C = \{Q_1, \ldots, Q_r\}$ son K racionales (extensión).

Sean $P_1, P_2, \ldots$ infinitos ptos S-enteros.

$\forall \nu \in S$, $\overline{C}(\underbrace{K_\nu}_{\text{completación con } |\,|_\nu})$ $\Rightarrow$ a subsucesión convergente. Como S es finito, podemos suponer $P_i \xrightarrow{\nu} P^\nu$

$S = S' \cup S''$, $S' = \{\nu \text{ tq } P^\nu \in C(K_\nu)\}$ $S'' = \{\nu \text{ tq } P^\nu \in \overline{C}(K_\nu) \setminus C(K_\nu)\}$
$\overline{C}(K_\nu) \setminus C(K_\nu) = \{Q_1, \ldots, Q_r\}$ $(r \geq 3)$

Def.- Dado N fijo (se elegirá después)

$$V := H^0(\mathcal{O}_{\overline{C}}(N(Q_1 + \cdots + Q_r))) = \{f \in K(\overline{C}) : (f) + N(Q_1 + \cdots + Q_r) \geq 0\}$$

R-R: $\dim V - \dim(\mathcal{L}(K_{\overline{C}} - N(Q_1 + \cdots + Q))) = \deg(N(Q_1 + \cdots + Q_r)) - g_C + 1$

$$\Rightarrow \underbrace{\dim(V) - 1}_{d :=} \geq Nr - g_{\overline{C}}$$

$\varphi : \overline{C} \longrightarrow \mathbb{P}^d$ $\{\varphi_i\}_{i=0}^d$ K-base de V, asumirlos en $\mathcal{O}_{K,S}[C]$ (polos en inf)
$x = [x_0, \ldots, x_n] \mapsto [\varphi_0(x) : \ldots : \varphi_d(x)]$ así $\varphi_j(P_i)$ en $\mathcal{O}_{K,S}$
y no es degenerado ya que es base.

Ahora escogemos hiperplanos:

- Para $\nu \in S'$, $L_{\nu,j} = X_j$ $0 \leq j \leq d$.
- Para $\nu \in S''$, definir $W_{\nu,j} := \{f : V : \mathrm{ord}_{P^\nu}(f) \geq j - N\}$

$$V = W_{\nu,0} \supseteq W_{\nu,1} \supseteq \ldots$$

$\dim(W_{\nu,i} / W_{\nu,i+1}) \leq 1$ inductivamente, nos queda que

$$\dim(W_{\nu,j}) \geq \dim V - j = d + 1 - j$$

Así que puedo escoger base de V $\{\omega_{\nu,j}\}_{j=0}^d$ con $\omega_{\nu,j} \in W_{\nu,j}$

$$\Rightarrow \omega_{\nu,j} = L_{\nu,j}(\varphi_0, \ldots, \varphi_d)$$

y escogemos estos hiperplanos $L_{\nu,j}$ (l. i pues $\{\omega_j\}_{j=0}^{d}$ base)

1] a] $\nu \notin S$, $\max_j \|\varphi_j(P_i)\|_\nu \leq 1$ $\forall i \geq 1$

b] $\nu \in S'$; $\max_j \|\varphi_j(P_i)\| \leq C_\nu$

c] $\nu \in S''$; $\max_j \|\varphi_j(P_i)\| << \|t_\nu(P_i)\|_\nu^{-N}$ $\forall i \geq 1$

con t_ν param. local en P^ν

d] $\nu \in S'$ $\max \|\omega_{\nu,j}(P_i)\| \ll \|t_\nu(P_i)\|^{j-N}$ $\forall i \geq 1$

Dem.]: a] $\varphi_j(P_i) \in \mathcal{O}_{K,S}$ ✓ (uso de S-entero)

b] P^ν está en ningún y así el máx queda acotado.

c] d] $\ll \; := \; \leq \text{Cte} \cdot$ ___

$P^\nu \in \{Q_1, \dots, Q_r\}$ $\varphi_j \in V = W_{\nu,0} \Rightarrow \text{ord}_{P^\nu}(\varphi_j) \geq -N$

$\omega_{\nu,j} \in W_{\nu,j} \Rightarrow \text{ord}_{P^\nu}(\omega_{\nu,j}) \geq j-N$ ∎

2] $h(\varphi(P_i)) \leq N \cdot \sum \lambda_\nu(t_\nu, P_i) + O(1)$

Dem: (definición) $\sum_\nu \log \max_j (\|\varphi_j(P_i)\|_\nu) \leq \sum_{\nu \in S''} \log \max(\|\varphi_j(P_i)\|_\nu) + O(1)$

$\leq \sum \log \|t_\nu(P_i)\|_\nu^{-N} + O(1)$

$\leq N \sum \log \frac{\|t_\nu(P_i)\|_\nu}{\max \|x_j(P_i)\|_\nu} + O(1)$ ∎

3] Para $\nu \in S'$, $\sum_j \lambda_\nu(L_{\nu,j}, \varphi(P_i)) \geq (d+1) \log \max_k \|\varphi_k(P_i)\|_\nu + O(1)$

Dem.]: $\varphi_j(P_i) \neq 0$ (si fuese cero ∞ veces $\Rightarrow$ cont. en plano)

3

$$\sum_j \lambda_\nu(L_{\nu,j}, \varphi(P_i)) = \sum -\log \frac{\|L_{\nu,j}(\varphi(P_i))\|_\nu}{\max \|\varphi_k(P_i)\|_\nu}$$

$\nearrow x_j$

$$= (d+1)\log \max_k \|\varphi_k(P_i)\|_\nu - \underbrace{\sum \log \|\varphi_j(P_i)\|_\nu}_{\text{acotado por lo anterior ie } O(1)}$$

4] Para $\nu \in S''$

$$\sum \lambda_\nu(L_{\nu,j}, \varphi(P_i)) \geq (d+1)\log\max \|\varphi_k(P_i)\|_\nu + (d+1)\left(\frac{d}{2}-N\right)\lambda_{\bar{C},\nu}(t_\nu, P_i) + O(1)$$

Dem: $L.I. = \sum_j -\log \frac{\|L_{\nu,j}(\varphi(P_i))\|_\nu}{\max \|\varphi_k(P_i)\|}$ recordar $L_{\nu,j}(\varphi) = \omega_{\nu,j}$.

$$= (d+1)\log\max\|\varphi_k(P_i)\|_\nu - \sum_j \log\|\omega_{\nu,j}(P_i)\|_\nu$$

$$\geq \quad '' \quad - \sum_{0\leq j\leq d}(j-N)\log\|t_\nu(P_i)\|_\nu + O(1).$$

se puede pasar al λ ya que $P_i \to Q$ en el conjunto.

ie $$\sum_{\nu\in S}\sum_j \lambda_\nu(L_{\nu,j}, \varphi(P_i)) \geq (d+1)\sum \log\max_k \|\varphi_k(P_i)\| \quad 3] \text{ y } 4]$$

$$+ (d+1)\left(\frac{d}{2}-N\right)\sum_{\nu\in S''}\lambda_{\bar{C},\nu}(t_\nu, P_i) + O(1).$$

$$\geq (d+1)h(\varphi(P_i)) + (d+1)\left(\frac{d}{2}-N\right)\frac{1}{N}\cdot h(\varphi(P_i)) + O(1)$$

$$= h(\varphi(P_i))\left(d+1+(d+1)\left(\frac{d}{2N}-1\right)\right) + O(1) \qquad d \geq Nr - g_{\bar{C}}$$

$$\geq h(\varphi(P_i))\left(d+1+(d+1)\left(\frac{r}{2}-1-\frac{g_{\bar{C}}}{2N}\right)\right) + O(1) \qquad N \gg 0$$

Como $r \geq 3$ hay contradicción con el Teo del Subesp

Ej] $x^2 - 2y^2 = 1 \subseteq \mathbb{A}^2$ con ∞ puntos, $K = \mathbb{Q}$, $S = \{\infty\}$.