Puntos enteros en superficies (Gion) I

25/oct/18

→ K = cuerpo de números, $\mathcal{O}_K = \{x \in K : x \text{ integral sobre } \mathbb{Z}\} = K \cap \overline{\mathbb{Z}}$

M = lugares primos $\cup$ lugares ∞

$|x|_\nu = \#(\mathcal{O}_K/\nu)^{-\mathrm{ord}_\nu(x)}$ y $|\ |$ real, $|\ |^2$ complejo

Las localizaciones $\mathcal{O}_\nu = \{x \in K : |x|_\nu \leq 1\} \supset m_\nu = \{x \in K : |x|_\nu < 1\}$

(los $\mathcal{O}_\nu$ son DVR y $\mathcal{O}_K$ dominio int cerrado $\Rightarrow \mathcal{O}_K = \bigcap_{\substack{\nu \text{ primo} \\ \text{finito}}} \mathcal{O}_\nu$)

Para S conjunto finito de lugares con $S \supset$ lugares ∞ $\Rightarrow$

$$\mathcal{O}_S := \{x \in K : |x|_\nu \leq 1 \ \ \forall \nu \notin S\} = \bigcap_{\substack{\nu \text{ primo} \\ \text{no en } S}} \mathcal{O}_\nu$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{O}_K \subseteq \mathcal{O}_S \subseteq K$. $\mathcal{O}_S$ son los S-enteros, $\mathcal{O}_S^* = \{|x|_\nu = 1\}$ las unidades.

Problema: Describir S-puntos en variedades.

Para variedades proyectivas $\tilde{X}$: $\tilde{X}(K) = \tilde{X}(\mathcal{O}_K)$ limpiando denominadores; pero eso no pasa en variedades cuasi-proyectivas.

Ej) $\{x^2+y^2=z^2\} = \tilde{X} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}}$ $\Rightarrow$ $\tilde{X}(\mathbb{Z}) = \tilde{X}(\mathbb{Q}) = \infty$ triples, pero $X(\underset{z\neq 0}{\mathbb{Z}}) = \{(1,0),(0,1)\}$

En general ⟶

→ Versión conj. de Vojta: Sea $\tilde{X}$ una variedad proyectiva nonsing $|_K$, $K_{\tilde{X}}$ div. canon. y $D|_K \subset \tilde{X}$ un divisor con cruces simples normales. Suponer $K_{\tilde{X}}+D$ big. $\Rightarrow$ Si $X := \tilde{X} \setminus D$, tenemos que $X(\mathcal{O}_S)$ no es Zariski denso. [ie está contenido en un conj. algebraico]

Teo (Siegel) [lo vimos con Teo. subespacio a la Corvaja-Zannier] $\tilde{C} \subset \mathbb{P}^m_K$ curva, $C \subseteq \mathbb{A}^m_K$ con $\overline{C} = \tilde{C}$ y $\tilde{C} \setminus C \geq 3$ ptos $\Rightarrow C(\mathcal{O}_S)$ finito.

obs: En Conj. Vojta para $\tilde{C}$ y $D = \tilde{C} \setminus C = \sum_{i=1}^{s} p_i$ $s \geq 3$ Tenemos $\deg(\overset{2g-2}{K_{\tilde{C}}} + \sum p_i) > 0$ $\Rightarrow K_{\tilde{C}} + \sum p_i$ big (amplio en este caso), y así $\boxed{\text{Siegel} \Rightarrow \text{conj Vojta}}$.

[Si # ptos $\leq 2 \Rightarrow K_C + D$ no nec. amplio].

Queremos ver que pasa con superficies. Observar que en conjetura Vojta si $D = \emptyset$ $\Rightarrow$ $\tilde{X}$ tipo general y $X(K)$ no es Zariski denso lo que es la conj. de Bombieri-Lang.

1. Dado $X \in \mathbb{P}^N_K$ y ν lugar finito $\Rightarrow$ $X_\nu \in \mathbb{P}^N_{K(\nu)}$ bien definido "limpiando generador" de $\mathfrak{m}_\nu$.

2. Dado $D_K \subset \mathbb{P}^N_K$ conjunto algebraico $\leftrightarrow I_D \subset K[x_0,..,x_N]$ ideal homogeneo

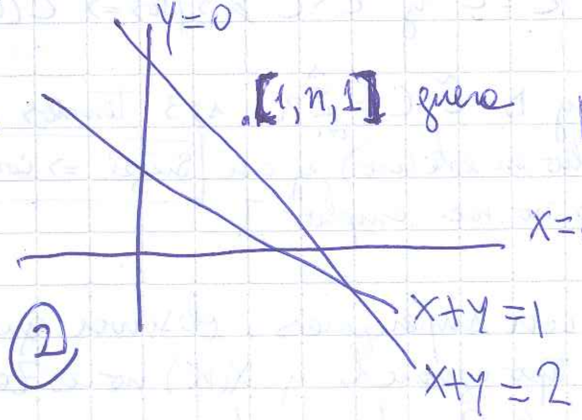
$\Rightarrow I_{D,\nu} := I_D \cap \mathcal{O}_\nu[x_0,..,x_N] \Rightarrow \overline{I_{D,r}} \subset K(\nu)[x_0,..,x_N]$

$\Rightarrow D_\nu \subset \mathbb{P}^N(K(\nu))$ reducción mod ν.

$\therefore$ Dado $x \in \mathbb{P}^N_K$ podemos verificar $x_\nu \in D_\nu$.

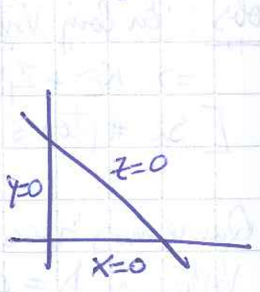
3. Sea S como siempre, $\tilde{X} \subset \mathbb{P}^N$ var. sobre K.
$P \in \tilde{X}$ K-punto es un S-punto con respecto a D si $\nexists$ ν fuera de S tal que $P_\nu \in D_\nu$.
Luego, el conj. de S-puntos con resp. a D se denota por $X(\mathcal{O}_S)$ donde $X := \tilde{X} \setminus D$.

Ej: Conj. de Vojta dice que con 3 rectas en posición general podrían haber S-puntos Zariski denso: eg $\{xyz = 0\}$ $S = \{2, \infty\}$; pero con 4 rectas no es posible. Con muchas rectas paralelas falla, ya que no es SNC.



$[1,n,1]$ fuera pero

$\mathbb{Z} = \mathcal{O}_K$ ①



$S = \{\infty, 2\} \Rightarrow$ hay ∞

$\Rightarrow [1, 2^n, 1]$

Ej.- Toda $\tilde{X}_d \subset \mathbb{P}^3_K$ con $d \geq 5$ satisface la hipótesis BL, y en efecto se espera que una genérica tenga sólo finitos puntos. Notar que en casos particulares los $\tilde{X}_d$ contienen rectas y luego $\boxed{\text{no}}$ se puede esperar finitud de $\tilde{X}_d(K)$ eg $x_0^d+x_1^d+x_2^d+x_3^d=0$.

obs: Si $\tilde{X} \dashrightarrow C$ con $g(C) \geq 2 \Rightarrow$ Faltings da degeneración de $\tilde{X}(K)$. Esto ~~p~~ implica $q(\tilde{X}) \geq 2$. Cuando $q(\tilde{X}) \geq 1 \Rightarrow$ hay morfismo albanese $\alpha: \tilde{X} \to \mathrm{Alb}(\tilde{X})$ $\nearrow \alpha(\tilde{X})$ curva $\Rightarrow$) o $\nearrow \alpha(\tilde{X})$ superficie $\Rightarrow \exists$ teoremas sobre densidad de K-puntos en $\alpha(\tilde{X})$. [Podría pasar $\tilde{X} \twoheadrightarrow$ Abeliana genéricamente finito ramificado con muchos K-ptos en Abel pero destruidos según BL en $\tilde{X}$ ...] Si $q(\tilde{X})=0 \Rightarrow$ misterio [eg $\pi_1(\tilde{S})=0$].

→ $\tilde{X}$ = sup. proy. nosingular $/_K \supset D = D_1 \cup \ldots \cup D_r$ unión de curvas $/_K$ irreduc.

Meta: poner condiciones en D para mostrar $X := \tilde{X} \setminus D$, $X(\mathcal{O}_S)$ no Zar. denso.

[no es sólo sacar un # adecuado de ~~rectas~~ curvas eg rectas // en $\mathbb{P}^2$]

Teo (Corvaja-Zannier, 2004) Asumir existen enteros positivos $p_1, \ldots, p_r$ tales que

- $D = p_1 D_1 + \ldots + p_r D_r$ es big y nef.
- $\forall i, j, k$ distintos $D_i \cap D_j \cap D_k = \phi$
- $\forall i$, sea ξ la solución minimal de $D_i^2 \xi^2 - 2(D.D_i)\xi + D^2 = 0$. (Hodge Index)

Entonces, $2\xi D^2 > (D.D_i)\xi^2 + 3p_i D^2$.

$\Rightarrow X(\mathcal{O}_S)$ no es Zariski denso.

$$\left[\begin{array}{l} \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad (\lambda D_1 + \mu D_2)^2 > 0 \\ \Rightarrow \begin{vmatrix} D_1^2 & D_1D_2 \\ D_1D_2 & D_2^2 \end{vmatrix} \leq 0 \end{array}\right]$$

Def.- $\tilde{X}$ var. proy., $\overset{=\mathcal{O}_{\tilde{X}}(D)}{\mathcal{L}}$ line bundle en $\tilde{X}$ se dice **big** si $\kappa(\tilde{X}, \mathcal{L}) = \dim X$

IITAKA [$\Leftrightarrow h^0(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(mD)) \geq C \cdot m^n$, $\forall C > 0$ para $m >> 0$], ie, el ~~morfis~~ la aplicación $\phi: \tilde{X} \dashrightarrow \mathbb{P}H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes m})$ es biracional $m >> 0$.

Def.- Un $\mathcal{L}$ es nef ssi $\mathcal{L}.\Gamma \geq 0$ $\forall \Gamma \subset \tilde{X}$ irreducible.

Teo: D nef $\Rightarrow$ D big $\Leftrightarrow D^2 > 0$. [Si $D.\Gamma > 0$ $\forall \Gamma \Rightarrow$ es amplio por Nakai-Moishezon]

Teo: D big $\Leftrightarrow \forall A$ amplio $\exists m \in \mathbb{Z}_{>0}$ y $N \geq 0$, $mD \sim A + N \Leftrightarrow \exists A \equiv$ amplio ... $mD \equiv A + N$

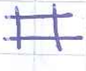
Teo: D big y nef $\Rightarrow$ $\mathrm{Base}(|D|) = \{\Gamma \subset \tilde{X}$ curva $: \Gamma.D = 0\} \subsetneq \tilde{X}$.

Teo: $D \subset \tilde{X}$ curva y big $\Rightarrow D^2 > 0$, y así es amplia.

obs: No queda claro la relación con Vojta salvo poner más hipótesis.

(Levin[37])

<u>Cor 5.1.4</u> : $\tilde{X}$ = sup. proy. nosingular $D_1, D_2, D_3, D_4 \subset \tilde{X}$ curvas irreducibles, no 3 concurrentes. Asumir D_i es big $\forall i$, sea $X = \tilde{X} \setminus \cup D_i$ $\Rightarrow X(\mathcal{O}_S)$ no es Zariski denso.
$\underbrace{\text{big}}_{\text{ie amplio}}$

<u>obs</u>.-  $\subset \mathbb{P}^2$ muestra que 3 no es suf ;  $\subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ muestra que big es necesario

<u>Cor 5.1.5</u> : $\hat{X} \supset D_1, .., D_5$ 5 curvas dist irred, no 3 concurrentes ; $X := \hat{X} \setminus (D_1 \cup \cdots \cup D_5)$.
(Teo1en [CZ]) Asumir $D_i^2 = 0$ $\forall i$ y $\exists p_1, .., p_5, c$ enteros positivos tales que $p_i p_j (D_i . D_j) = c$ $\forall i \neq j$ $\Rightarrow X(\mathcal{O}_S)$ no es Zariski denso.

<u>Cor 5.1.6</u> : $\tilde{X} \subset \mathbb{P}^3$ cúbica suave y sean $D_1, .., D_6$ 6 rectas dentro de 2 planos, no 3 de ellos concurrentes.
$X := \tilde{X} \setminus \cup D_i \Rightarrow X(\mathcal{O}_S)$ no es Zariski denso.

<u>dem</u> : $H_1 = D_1 + D_2 + D_3$, $H_2 = D_4 + D_5 + D_6$ $\quad D = H_1 + H_2$, $D^2 = 4 \cdot 3 = 12$
$D \cdot D_i = 2H . D_i = 2 \quad D_i^2 = -1$
(1) $D = H_1 + H_2$ es big y nef (en efecto amplio) (2) intersección ok.
(3) $-\xi^2 - 4\xi + 12 = 0 \Rightarrow \xi = 2$ $\forall i$ y $24 \cdot \xi > 2\xi^2 + 3 \cdot 1 \cdot 12 = 44$ $\blacksquare$

[Notar que $K_{\tilde{X}} \sim -H$ en ese caso, así que Vojta predice para $D = 2H$]

<u>obs</u>.- Notar que en Teo. sacar 1 <u>curva amplia</u> no sirve ya que $D = n\Gamma$ (Γ = curva) y $\xi = n$ y $2n^3 > 4n^3$ →←.
eg $\mathbb{P}^2 \setminus$ recta, pero en general uno lo podría esperar $K + \Gamma$ chances de ser big. [Este es el caso agún]

Lema 5.1.1 : $\tilde{X}$ = sup. proy no sing, D divisor en $\tilde{X}$ y $C \subset \tilde{X}$ curva.

$\Rightarrow \dim\left(H^0(\tilde{X}, D) / H^0(\tilde{X}, D-C)\right) \leq \max\{0, 1 + D\cdot C\}$

Dem : $0 \to \mathcal{O}_{\tilde{X}}(D-C) \to \mathcal{O}_{\tilde{X}}(D) \to \mathcal{O}_{\tilde{X}}(D)|_C \to 0$

$\Rightarrow H^0(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(D)) / H^0(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(D-C)) \subset H^0(C, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(D)|_C)$

Sea $\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sigma} & \tilde{X} \\ \cup & & \cup \\ C' & & C \end{array}$ resol. sing en C $\Rightarrow h^0(C, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(D)|_C) + h^0(pts) = h^0(C, \sigma_*(\mathcal{O}_{C'}) \otimes D)$

Proyección : $h^0(C, \sigma_* \mathcal{O}_{C'} \otimes D) \simeq h^0(C', \sigma^*(D)) \Rightarrow h^0(C, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(D)|_C) \leq h^0(C', \sigma^*(D))$

R-R : $h^0(C', \sigma^*(D)|_{C'}) = h^0(C', K - \sigma^*(D)) + \sigma^* D \cdot C' + 1 - g(C')$

Si $h^0(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(D)|_C) = 0 \Rightarrow$ ✓

Si $h^0(\quad \text{〃} \quad) > 0 \Rightarrow h^0(C', \sigma^* D|_{C'}) > 0 \Rightarrow \sigma^*(D)|_{C'} \geq 0$

$\Rightarrow h^0(C', K_{C'} - \sigma^*(D)|_{C'}) \leq h^0(C', K_{C'}) = g(C')$

$\Rightarrow h^0(C', \sigma^*(D)|_{C'}) = \underbrace{h^0(K - \sigma^* D) - g}_{\leq 0} + \underbrace{\sigma^* D \cdot C'}_{D\cdot C} + 1 \leq D \cdot C + 1$ ∎