Puntos enteros en superficies (Gion) II — 8/Nov/18

- **Lema**: $\tilde{X}$ = sup proy. no-sing $|_K$, $D|_K$ divisor en $\tilde{X}$, $C|_K \subset \tilde{X}$ curva.
  $\Rightarrow \dim_K H^0(\tilde{X}, D)/H^0(\tilde{X}, D-C) \leq \max\{0, 1 + D\cdot C\}$.

- **Teo** [Corvaja–Zannier 2004] $\tilde{X} \supset D_1 \cup \dots \cup D_r |_K$ unión curvas irreducibles distintas.
  Asumir existen enteros positivos $p_1, \dots, p_r$ tales que
  - $D = p_1 D_1 + \dots + p_r D_r$ es big y nef ($D^2 > 0$ y $D \cdot \Gamma \geq 0$ $\forall$ curva Γ)
  - $\forall i \neq j \neq k$, $D_i \cap D_j \cap D_k = \phi$ ($\nexists$ pto común a tres curvas distintas)
  - Para cada i, sea ξ la solución minimal real de
    $$D_i^2 \xi^2 - 2(D\cdot D_i)\xi + D^2 = 0. \quad [\exists \text{ Por teo. índice Hodge}]$$
  Se requiere $2\xi D^2 > (D.D_i)\xi^2 + 3p_i D^2$.
  $\Rightarrow X(\mathcal{O}_S)$ no es Zariski Denso.

Dem: En efecto, se mostrará que dados $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots$ ∞ S-puntos distintos $\Rightarrow$ existe una curva $|_K$ conteniendo a ∞ de ellos. Notar que al ser K numerable $\Rightarrow$ las curvas$|_K$ en $\tilde{X}$ lo son y luego las podemos numerar $C_1, C_2, \dots$. Asumir que no existe curva $|_K$ conteniendo todos los S-puntos $\Rightarrow$ dado n, existe P_n S-punto fuera de $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$ $\Rightarrow \{P_n\}$ es tal que no hay curva $|_K$ conteniendo ∞ de ellos.

Sean $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$ S-puntos distintos. Como los lugares en S son finitos $\Rightarrow$ asumiremos que para cada $\nu \in S$, $P_i \to P_\nu \in \tilde{X}(K_\nu)$ donde K_ν es la completación de K por ν. [extensión finita de la corresp. compl. de $\mathbb{Q}$, la cual es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{Q}_p = \mathrm{Frac}(\mathbb{Z}_p)$]. La convergencia es completitud K_ν + compacidad de $\tilde{X}$.

D big y nef $\Rightarrow N \gg 0$ $V_N = H^0(\tilde{X}, ND) = \{\varphi \in K(\tilde{X}) : \mathrm{div}(\varphi) + ND \geq 0\} \cup \{0\}$ es K-espacio vectorial de dimensión finita d $\subset \mathcal{O}_{\tilde{X}}(X)$

$$d = \dim_K V_N = \frac{D^2}{2} \cdot N^2 + O(N)$$

Sea $\varphi_1,\dots,\varphi_d$ base$|_K$ de V_N y limpiamos denominadores de coeficientes para que $\varphi_i(P_j)\in \mathcal{O}_S$. Tenemos para $N>>0$ una aplicación biracional $\tilde{X} \dashrightarrow \mathbb{P}(H^0(nD))$ definida por los $\varphi_1,\dots,\varphi_d$. [en principio podrían haber curvas en el base locus, pero $Bs|ND| = \{\Gamma\subset\tilde{X} : \Gamma\cdot D=0\}\subsetneq \tilde{X}$]

[obs.- $\varphi_j(P_i)=0\ \forall j$ "no es bueno" para el argumento que viene.
Pero si eso pasa para ∞ puntos $\Rightarrow$ existen curvas sobre extensión finita de K en $Bs|ND|$ tal que los contienen [ya que $Bs|ND|\subsetneq \hat{X}$ y pueden haber finitos puntos bases extra].
Luego asumir $\forall i$, $\exists j$ $\varphi_j(P_i)\in \mathcal{O}_S\setminus\{0\}$. No importa que $1\in V_N$ y $\varphi_j(P_i)$ no son polos.]

La idea es adecuar el Teorema del subespacio para los puntos $[\varphi_1(P_i),\dots,\varphi_d(P_i)]$ a través de una buena elección de subespacios lineales de V_N ie var. lineales de $\mathbb{P}^{d-1}_K$.

- Teo Subespacio: Dado $d\geq 1$, $q\geq 1$ y $\nu\in S$, sean $L_{1,\nu},\dots,L_{q,\nu}$ formas lineales en $x_1,\dots,x_d$ con coeficientes en $\overline{K}$ con cruces simples normales [en particular $q=d$ y l.i. sirve]. Sea $\varepsilon>0$. Entonces existen subespacios lineales propios $H_1,\dots,H_r$ definidos$|_K$ tales que para todo $x\in\mathbb{P}^d_K$ fuera de ellos se tiene

$$\prod_{\nu\in S}\prod_{i=1}^{d} |L_{i,\nu}(x)|_\nu > \Big[\underbrace{\prod_{\nu\in M}\max_i(|x_i|_\nu)}_{\parallel}\Big]^{-\varepsilon}$$

$H(x)$ (la altura mult. de x)

Encontraremos subvar. lineales $L_{i,\nu}$ para cada $\nu \in S$ tales que

$$(*) \qquad \prod_{i=1}^{d} |L_{i,\nu}(\varphi(P_j))|_\nu < C_\nu \cdot \|\varphi(P_j)\|_\nu^{-\mu_\nu}$$

con $C_\nu, \mu_\nu > 0$ constantes que no dependen de j. Como $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ es K-base de V_N y $1 \in V_N$, entonces:

$$\frac{C_\nu}{C'_\nu} < \frac{1}{K^\alpha} < \|\varphi(P_j)\|_\nu^\alpha$$

$$1 = c_1 \varphi_1 + \dots + c_d \varphi_d$$

$$\Rightarrow \; 1 \leq \sum_{i=1}^{d} |c_i|_\nu |\varphi_i(P_j)|_\nu \leq K \|\varphi(P_j)\|_\nu \;\Rightarrow\; \|\varphi(P_j)\|_\nu \text{ acotado } \forall j$$

$\therefore$ Dado $0 < \mu \leq \mu_\nu$, $\exists\, C'_\nu$ tal que $\displaystyle\prod_{i=1}^{d} |L_{i,\nu}(\varphi(P_j))|_\nu < C'_\nu \cdot \|\varphi(P_j)\|_\nu^{-\mu}$

[simplemente es $\Leftrightarrow$ a $C_\nu / C'_\nu \leq \|\varphi(P_j)\|_\nu^{\mu_\nu - \mu}$, $\mu_\nu - \mu > 0$ (sino trivial) y luego ajustar C'_ν con]

$\therefore$ si $(*)$ es cierto $\forall \nu \in S \Rightarrow \exists\, C > 0$ y $\mu = \min_{\nu \in S} \{\mu_\nu\} > 0$ tal que

$$\prod_{\nu \in S} \prod_{i=1}^{d} |L_{i,\nu}(\varphi(P_j))|_\nu < C \cdot \Big(\prod_{\nu \in S} \|\varphi(P_j)\|_\nu\Big)^{-\mu}$$

Como $\varphi_i(P_j) \in \mathcal{O}_S \Rightarrow \|\varphi_i(P_j)\|_\nu^{-\mu} \geq 1$ si $\nu \notin S$ y así

$$\prod_{\nu \in S} \prod_{i=1}^{d} |L_{i,\nu}(\varphi(P_j))|_\nu < C\, H(\varphi(P_j))^{-\mu}$$

Por Teo de subespacio $\Rightarrow H(\varphi(P_j))^{-\varepsilon} < C\, H(\varphi(P_j))^{-\mu}$ a menos que contenido en finitos subespacios lineales$|_K$. Si $\mu = \frac{\varepsilon}{2}$ $\Rightarrow H(\varphi(P_j))^{\mu/2} < C$ pero (Por Northcott) eso implicaría finitos puntos (en K y así grado acotado y alt acot), y luego φ_0/φ_1 toma finitos valores $\Rightarrow$ puntos contenidos en $\varphi_0 = c\varphi_1$ curva$|_K$ [Caso $\varphi_1 = 0$ en ∞ puntos $\Rightarrow$ mejor]. Sino $H(\varphi(P_j)) \to \infty$ y luego ∞ de esos puntos deben estar en un hiperpl$|_K$ y luego tomar preimagen con φ para concluir lo que queremos.

$\therefore$ La clave es mostrar $(*)$. Tendremos 3 casos:

(i) $P_\nu \notin D_{K_\nu}$ ie $P_\nu \in X(K_\nu)$.

(ii) $P_\nu \in$ a una componente de D (solo una).

(iii) $P_\nu \in$ a dos componentes de D.

$\boxed{(i)}$ En este caso las funciones racionales φ_j están definidas pero ∞ $P_i \to P_\nu \notin D_\nu$ ya que polos pueden solo estar en D.

Si $P_\nu = [a_1, \dots, a_d] \Rightarrow |\varphi_j(P_i)|_\nu < |a_j|_\nu + \delta$, δ dado

$\Rightarrow |\varphi_j(P_i)|_\nu < C^{te}$ para todo j, i

$\Rightarrow \prod_{i=1}^{d} |\varphi_j(P_i)|_\nu < C^{te}$ y $\max\{|\varphi_j(P_i)|_\nu\} < C^{te'}$

$\Rightarrow \exists M > 0$, $\prod_{i=1}^{d} |\varphi_j(P_i)|_\nu \leq M \max\{|\varphi_j(P_i)|_\nu\}^{-1}$ $\forall i$.

Tomar $X_1, \dots, X_d$ como hiperplanos en ese caso.

$\boxed{(ii)}$ Este caso contiene la clave del método. Se define la filtración de $V := V_N$

$$W_{j,\nu} = W_j := \{\varphi \in V_N : \mathrm{ord}_{D_\nu} \varphi \geq j-1-N p_\nu\} \cup \{0\}$$

donde D_ν es <u>la</u> componente donde cayó P_ν. Este W_j se puede asociar a $H^0(\tilde{X}, ND - (j-1)D_\nu)$.

eventual.

$$V = W_1 \supseteq W_2 \supseteq \dots \supseteq W_{h_j} = 0 \quad [\text{ya que } (ND-(j-1)D_\nu)\cdot H < 0]$$

y siempre podemos encontrar base de V $L_{1,\nu}, \dots, L_{d,\nu}$ (expresados en los φ_i's) tales que contienen base de cada W_j.

El orden de un elemento $L_{k,\nu} \in W_j \setminus W_{j+1}$ (no cero) es exactamente

$$j - 1 - N p_\nu$$

Así, $\operatorname{ord}_{D_\nu}\left(\prod_{i=1}^{d} L_{i,\nu}\right) = \sum_{i=1}^{d} \operatorname{ord}_{D_\nu}(L_{i,\nu}) = \underbrace{\sum_{j\geq 1} (j-1-Np_\nu)\dim(W_j/W_{j+1})}$.

¡Queremos que $\prod_{i=1}^{d} L_{i,\nu}$ se anule en D_ν! y así queremos $\geq c^{te} > 0$

Si tenemos eso, entonces sea $\{t_\nu = 0\} = D_\nu$ alrededor de P_ν
$\Rightarrow L_{j,\nu} = t_\nu^{\operatorname{ord}_{D_\nu}(L_{j,\nu})} \cdot P_{j,\nu}$ donde $P_{j,\nu}$ es una función racional la cual es regular en P_ν [$L_{j,\nu}/t_\nu^{\operatorname{ord}_{D_\nu}(L_{j,\nu})}$ es función racional; si no es regular $\Rightarrow$ polo por P_ν pero los polos de esa función ~~son~~ vienen de los polos de los φ_i $\Rightarrow$ en D $\Rightarrow$ otra componente pasando por P_ν $\rightarrow\leftarrow$]

$\Rightarrow P_{j,\nu}(P_i)$ tienen norma $|\ |_\nu$ acotada para $i \gg 0$.
$\Rightarrow |L_{j,\nu}(P_i)|_\nu \ll |t_\nu^{\operatorname{ord}_{D_\nu}(L_{j,\nu})}(P_i)|_\nu$
$\Rightarrow \prod_{j=1}^{d} |L_{j,\nu}(P_i)|_\nu \ll |t_\nu(P_i)|_\nu^{\sum_{j=1}^{d} \operatorname{ord}_{D_\nu}(L_{j,\nu})}$ $\quad \sum_{j=1}^{d} \operatorname{ord}_{D_\nu}(L_{j,\nu}) > 0$ [ya viene]

Por otro lado, como los φ_j tienen polo de orden a lo más Np_ν en D_ν $\quad$ [t_ν es regular alr. de P_ν] $\|t_\nu(P_i)\|_\nu \leq 1 \quad i \gg 0$.

$\Rightarrow \max_j (|\varphi_j(P_i)|_\nu) \ll |t_\nu(P_i)|_\nu^{-Np_\nu}$

[$\varphi_j = t_\nu^{-\text{polo}_j} \cdot \psi_j$, ψ_j regular en P_ν y así similar a lo de arriba. $|t_\nu(P_i)|_\nu^{-\text{polo}_j} \leq |t_\nu(P_i)|_\nu^{-Np_\nu}$]

$\Rightarrow \exists\, \mu_\nu > 0$ con $\prod_{j=1}^{d} |L_{j,\nu}(P_i)|_\nu \ll \|\varphi(P_i)\|_\nu^{-\mu_\nu}$.

Necesitamos acotar $\sum_{j\geq 1} (j-1-Np_\nu)\dim(W_j/W_{j+1})$.

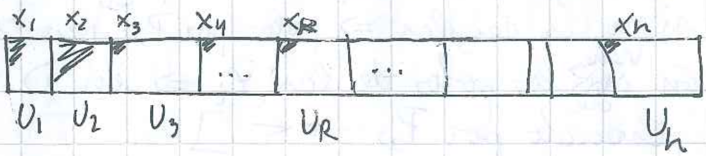
$$\parallel$$

$$\sum_{j\geq 1} j \dim(W_j/W_{j+1}) - (1+Np_\nu)\cdot d$$

Por lema inicial $\dim_K(W_j/W_{j+1}) \leq \max\{0,\ 1+ND.D_\nu - jD_\nu^2\}$
y queremos cota para $\sum_j j \dim(W_j/W_{j+1}) \geq ?$.

$\boxed{\text{Lema}}$: Sean $d, U_1, \dots, U_h \geq 0$ y R entero $\leq h$ tal que $\sum_{j=1}^{R} U_j \leq d$.
Asumir $\exists\ x_1, \dots, x_h$ reales tales que $0 \leq x_j \leq U_j$ y $\sum_{j=1}^{h} x_j = d$
$\Rightarrow \sum_{j=1}^{h} j x_j \geq \sum_{j=1}^{R} j U_j$.

Dem.-



$\sum_{j=1}^{h} x_i = d$

$\sum_{j=1}^{R} U_j \leq d$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{j=1}^{R} (R+1-j)(U_j - x_j)}_{\geq 0} \underbrace{- \sum_{j=R+1}^{h} (R+1-j) x_j}_{\geq 0} \geq 0$$

$$\parallel$$

$$(R+1)\sum_{j=1}^{R} U_j - \sum_{j=1}^{R} jU_j - (R+1)d + \sum_{j=1}^{h} j x_j$$

$$\parallel$$

$$\sum_{j=1}^{h} j x_j - \sum_{j=1}^{R} j U_j - (R+1)\left[d - \sum_{j=1}^{R} U_j\right] \geq 0 \qquad \blacksquare$$

$\rightarrow$ Ahora ajustaremos constantes para tener cota $\sum_{j=1}^{R} U_j \leq d$ (elegir R)
y para tener $\sum_{j=1}^{R} j u_j > c^{te} > 0$.

Para D_ν tenemos la $\xi > 0$ tal que

$$D_\nu^2 \xi^2 - 2(D.D_\nu)\xi + D^2 = 0$$

y

$$2\xi D^2 > (D.D_\nu)\xi^2 + 3p_\nu D^2$$

$\Rightarrow \exists\ \overset{\xi}{\overset{\vee}{\lambda}} > 0$ tal que

$$\frac{\lambda^2}{2} D.D_\nu - \frac{\lambda^3}{3} D_\nu^2 - \frac{D^2 p_\nu}{2} > 0 \qquad (B)$$

$$(D.D_\nu)\lambda - \frac{D_\nu^2 \lambda^2}{2} < \frac{D^2}{2} \qquad (A)$$

Si $R > h$ $\Rightarrow \sum_{j=1}^{R} U_j > d = \sum_{j=1}^{h} x_j$ ¡se contradice todos! $\Leftarrow$

$\Rightarrow R < h$

$0 \leq D.D_\nu - \varepsilon D_\nu^2 \leq D D_\nu - \lambda D_\nu^2$

Dijimos $D_\nu^2 \geq 0$, para $j < [\lambda N]$, $N \gg 0$

Sea $R = [\lambda N]$ (parte entera) y sean $U_j := 1 + N(D.D_\nu) - j D_\nu^2 \geq 0$,

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{R} U_j = RN(D\cdot D_\nu) - \frac{R^2 D_\nu^2}{2} + O(R+N) \leq N^2\left(D.D_\nu \lambda - \frac{D_\nu^2 \lambda^2}{2}\right) + O(N)$$

y luego por (A), $\sum_{j=1}^{R} U_j \leq d$. Luego aplicar Lema para deducir $\sum_{j=1}^{h} j \dim W_j/W_{j+1} \geq \sum_{j=1}^{R} j U_j$ [Se puede mostrar que $U_j > 0$ para $j \leq R$ y que $R \leq h$], y así

$$\sum_{j=1}^{R} j U_j = \sum_{j=1}^{[\lambda N]} j\left(1 + N(D.D_\nu) - j D_\nu^2\right) = N^3\left(\frac{\lambda^2 (D.D_\nu)}{2} - \frac{\lambda^3 D_\nu^2}{3} + O\left(\frac{1}{N}\right)\right)$$

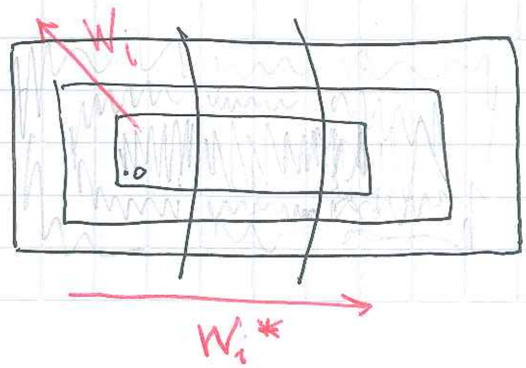
y así

$$\sum_{j\geq 1} \operatorname{ord}_{D_\nu}(L_{j,\nu}) = \sum j \dim W_j/W_{j+1} - (1+N_{p_\nu})d \geq N^3\Bigg(\underbrace{\frac{\lambda^2(D.D_\nu)}{2} - \frac{\lambda^3 D_\nu^2}{3} - \frac{D_{p_\nu}^2}{2}}_{> 0 \text{ por (B)}}\Bigg) + O(N^2)$$

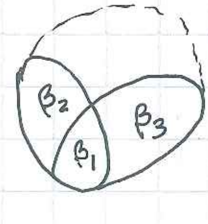
(iii) Si $P_\nu \in D_\nu \cap D_\nu^*$ $\Rightarrow$ será el mismo chiste salvo el siguiente lema de filtraciones dobles.

Lema: Sean $W_h \subset W_{h-1} \subset \cdots \subset W_2 \subset W_1 = V = W_1^* \supset W_2^* \supset \ldots \supset W_{h^*}^*$ dos filtraciones de un K-esp. vect dim finita V. Entonces existe base $\{\psi_1, \ldots, \psi_d\}$ de V la cual contiene base de cada W_i y cada W_i^*.

Dem:

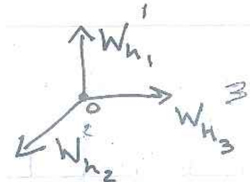


+



$\Rightarrow \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ l.i. y completar base si es necesario. ∎

obs): Con 3 filtraciones <u>NO</u> neces. resulta



con $\sum \dim W^i_{h_i} > \dim V$. Este simple hecho es crucial para no poder usar ptos triples etc.

Por lema existe base $\psi_1, \dots, \psi_d$ para tales 2 filtraciones. Sean $L_{j\nu}$ (funciones en los ℓ_i) como ψ_j. En analogía a lo hecho arriba, tomamos en P_ν $\{t_\nu = 0\} = D_\nu$ y $\{t_\nu^* = 0\} = D_\nu^*$

$$\Rightarrow \quad L_{j\nu} = t_\nu^{\operatorname{ord}_{D_\nu} \psi_j} \cdot t_\nu^{*\operatorname{ord}_{D_\nu^*} \psi_j} \rho_{j\nu}$$

con $\rho_{j\nu} \in K(X)$ regular en P_ν. [Por el asunto de polos codim 1]

Pero por lo anterior, podemos hacer que $\sum \operatorname{ord}_{D_\nu}(L_{j,\nu}) > 0$ y $\sum \operatorname{ord}_{D_\nu^*}(L_{j,\nu}) > 0$ y luego mismo argumento anterior nos da lo que queremos ■