I. MMP para superficies y Mori Fiber Spaces

Sea X superficie suave proy$/\mathbb{C}$ y sea $\omega_X := \det(T_X^\vee) = \Omega_X^2 \simeq \mathcal{O}_X(K_X)$ divisor canónico.

Recuerdo: Una (-1)-curva es una curva suave irreducible $E \subseteq X$ tal que:

① $E \simeq \mathbb{P}^1$ ⟺ ⓐ $K_X \cdot E < 0$
② $E^2 = -1$ ⓑ $E^2 < 0$

Ejercicio Probar (eg. usando Riemann-Roch) que ①+② ⟺ ⓐ+ⓑ, y que $K_X \cdot E = -1$ en tal caso.

Teorema (Castelnuovo): Sup. que $\exists$ (-1)-curva $E \subseteq X$. Entonces, $\exists! \ \varphi: X \to Y$ morfismo birracional tal que:
① $\varphi(E) = \{p\}$ y $\mathrm{Exc}(\varphi) = E$.
② Y superficie proyectiva suave.
Así, $X \simeq \mathrm{Bl}_p(Y)$.

⚠ Mori (1982): Reemplazar "$\exists$ (-1)-curva en X?" por "K_X nef?", ie, "¿$K_X \cdot C \geq 0$ para toda $C \subseteq X$ curva irreducible?". "numerically eventually free"

Ejercicio Probar que si K_X es semi-amplio (ie, "eventually free"), es decir, si $\exists\, m \gg 0$ tq $|mK_X|$ no tiene puntos de base $\Rightarrow$ K_X es nef.

Teorema del Cono (versión baby): Sup. que $\exists\, C \subseteq X$ curva irred. tal que $\mathbb{R}^{\geq 0}[C]$ rayo extremal tal que $K_X \cdot C < 0$ (ie, K_X no es nef). Entonces, $\exists! \ \varphi: X \to Z$ contracción extremal tal que:
① $\varphi(C) = \{p\}$, φ tiene fibras conexas.
② $\forall$ curva $\Gamma \subseteq X$ tal que $\varphi(\Gamma) = \{pt\}$ se tiene $K_X \cdot \Gamma < 0$.
③ Si $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq X$ son contraídas a puntos por φ entonces $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}^{>0}$ tal que $\Gamma_1 \equiv \lambda \Gamma_2$ en $NS(X)_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^{\rho_X}$. Así, $\Gamma_1, \Gamma_2 \in R := \mathbb{R}^{\geq 0}[C]$ "rayo extremal".
④ Z es una variedad proy. normal y $\rho_X = \rho_Z + 1$.

Ver Kollár-Mori Thm 3.7 & Coro 3.17

Con la notación anterior, notamos que hay 2 tipos de contracciones extremales:

1° φ birracional: φ contrae un divisor y Z superficie proy suave (Castelnuovo). Decimos que φ es una "contracción divisorial".

2° φ fibración, ie, $\dim(Z) < \dim(X)$: Aquí Z es un punto o una curva normal y luego Z es suave. Decimos que φ es un "Mori Fiber Space" (MFS).

Analicemos más de cerca el segundo caso, dependiendo de $\dim(Z)$:

Caso 2.0, $\dim(Z) = 0$: $Z = \{pt\}$ y luego $\rho_X = 0 + 1 = 1$, ie, $NS(X)_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}$. Así, toda curva $\Gamma \subseteq X$ es contraída por φ y luego $K_X \cdot \Gamma < 0$ $\forall \Gamma \subseteq X$ curva irred.

Hecho (Nakai-Moishezon): $A \in \mathrm{Pic}(X)$ amplio ⟺ $A^2 > 0$ y $A \cdot \Gamma > 0$ $\forall \Gamma \subseteq X$ curva irred.

Ejercicio Probar que si $\rho_X = 1$ entonces $A \in \mathrm{Pic}(X)$ amplio ⟺ $A \cdot \Gamma > 0$ para una curva $\Gamma \subseteq X$.

$\Rightarrow$ $-K_X$ es amplio (ie, X sup. de del Pezzo) y luego $X \simeq \mathbb{P}^2, \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathrm{Bl}_{p_1,\dots,p_r}(\mathbb{P}^2)$ con $1 \leq r \leq 8$. Como $\rho_X = 1$, deducimos que $\boxed{X \simeq \mathbb{P}^2}$

Caso 2.1, $\dim(Z) = 1$: $Z = B$ curva proy. suave. La fibra general de $\varphi: X \to B$ es una curva proy. suave F. Además, $\omega_F \simeq \omega_X|_F \otimes \det(\mathcal{N}_{F/X})$ (fórmula de adjunción).

Ejercicio Probar que $\mathcal{N}_{F/X}$ es el fibrado trivial y luego $\omega_F \simeq \omega_X|_F$.

Así, $2g(F)-2 = \deg(\omega_F) = \deg(\omega_X|_F) \overset{\text{adj}}{=} K_X\cdot F < 0$ y luego $g(F)=0$, i.e., $F\cong\mathbb{P}^1$.
Por suavidad genérica, $\exists\ \Delta\subseteq B$ conj. finito tal que $\varphi^{-1}(b) =: F_b \simeq \mathbb{P}^1$ $\forall\, b\in B\setminus\Delta$.
Si $b\in\Delta$ y escribimos $F_b = a_1C_1+\dots+a_nC_n$ con $a_i\geq 1$, entonces $C_i^2<0$ para todo $i\in\{1,\dots,n\}$ (ver Beauville Lemma III.9). Notar que $K_X\cdot F_b<0$ y luego $\exists j\in\{1,..,n\}$ tq $K_X\cdot C_j<0 \Rightarrow C_j$ es una (-1)-curva!

Luego, si X no posee (-1)-curvas entonces $\Delta=\emptyset$ y así $\boxed{X\cong\mathbb{P}(\mathcal{E})}$ (Noether-Enriques) donde $\mathcal{E}\to B$ es un fibrado vectorial de $rg(\mathcal{E})=2$.

<u>Conclusión</u> (Ver Beauville para más detalles): Para toda sup. proyectiva suave X tenemos

$$X=:X_0 \overbrace{\longrightarrow X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow}^{\text{contr. divisoriales}} X_m$$

con X_m modelo minimal (i.e., sin (-1)-curvas).

<u>Caso $\kappa(X)\geq 0$</u>: X_m es <u>único</u> (Beauville, Thm V.19).

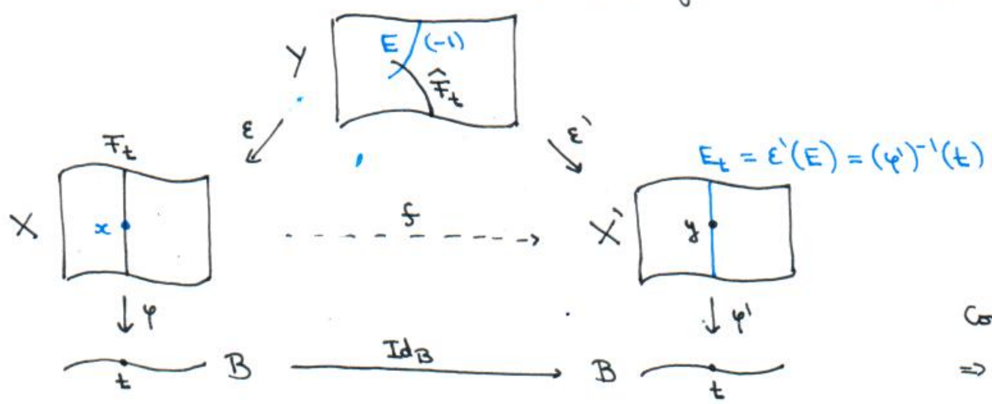
Ejercicio Probar que si $\kappa(X)\geq 0$ entonces K_{X_m} es <u>nef</u>.

<u>Caso $\kappa(X)=-\infty$</u>: K_{X_m} <u>no</u> es nef y $X_m\simeq\mathbb{P}^2\xrightarrow{\varphi}\{pt\}$ o $X_m\simeq\mathbb{P}(\mathcal{E})\xrightarrow{\varphi}B$.

⚠ Si $\kappa(X)=-\infty$ entonces X_m <u>no es único</u>. El Programa de Sarkisov busca describir aplicaciones birracionales $f: X_m \overset{\sim}{\dashrightarrow} X'_m$ entre diferentes MFS.

Ejercicio Las secciones de $\mathbb{P}(\mathcal{E})\to B$ corresp. a cocientes de rango 1 $\mathcal{E}\twoheadrightarrow\mathcal{L}$, donde $\sigma: B\to\mathbb{P}(\mathcal{E})$ define $\mathcal{L} := \sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$ (ver Hartshorne §V.2). Probar que en tal caso $\sigma(B)^2 = 2\deg(\mathcal{L}) - \deg(\det(\mathcal{E}))$. ¿Qué cociente define la sección $C_m\subseteq\mathbb{F}_m$ con $C_m^2=-m$, donde $\mathbb{F}_m = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m))$?

<u>Ejemplo importante</u> (Transformaciones elementales): Sea $\varphi:\mathbb{P}(\mathcal{E}) = X\to B$ y sea $x\in X$. Si $Y := Bl_x(X)\xrightarrow{\varepsilon} X$, entonces la transformada estricta de la fibra $F_t=\varphi^{-1}(t)$ con $t=\varphi(x)\in B$ es una curva (-1) que puede contraerse a $Y\xrightarrow{\varepsilon'}X'$ y donde $X'\simeq\mathbb{P}(\mathcal{E}')\xrightarrow{\varphi'}B$ también es una fibración en $\mathbb{P}^1$'s:



Vimos que $K_X\cdot F_t = -2$.
Además, $F_t^2=0$.
Como $\varepsilon^*F_t = \hat F_t + E \quad /\cdot\hat F_t$
$\Rightarrow 0 = \varepsilon^*F_t\cdot\hat F_t = \hat F_t^2 + \underbrace{\hat F_t\cdot E}_{=1}$
y así $\hat F_t^2 = -1$ ✓
Como $K_Y = \varepsilon^*K_X + E \quad /\cdot\hat F_t$
$\Rightarrow K_Y\cdot\hat F_t = K_X\cdot\varepsilon_*\hat F_t + E\cdot\hat F_t$
$= -2+1 = -1$ ✓

<u>Obs</u>: $E\equiv\lambda\hat F_t$ con $\lambda\in\mathbb{R}^{>0}$ $\Rightarrow E^2 = -1 = \lambda E\cdot\hat F_t = \lambda$ ↯
y luego ε' <u>no</u> contrae a E (Teorema del cono).

Ejercicio Probar que si $X=\mathbb{F}_m$ entonces $X'=\mathbb{F}_{m+1}$ (resp. $\mathbb{F}_{m-1}$) si $x\in C_m$ (resp $x\notin C_m$).

<u>Obs práctica</u>: Para $\mathbb{F}_0\simeq\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ la fibración $\varphi:\mathbb{F}_0\to\mathbb{P}^1$ asume que estamos <u>eligiendo</u> una proyección, i.e., $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\xrightarrow{pr_1}\mathbb{P}^1$ y $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\xrightarrow{pr_2}\mathbb{P}^1$ son MFS diferentes!

⚠ De acuerdo a Mori, $\mathbb{F}_1\to\mathbb{P}^1$ también es un MFS a pesar de que $\mathbb{F}_1\cong Bl_p(\mathbb{P}^2)$.

<u>Comentarios adicionales</u> : Sea X variedad proy. suave y sea $\pi : \mathcal{P} \to X$ fibración en $\mathbb{P}^1$'s que es Zariski localmente trivial. En particular, $\pi^{-1}(x) \simeq \mathbb{P}^1 \ \forall x \in X$. Entonces, $\mathcal{P} \cong \mathbb{P}(\mathcal{E})$ para cierto fibrado vectorial $\mathcal{E} \to X$ de $\mathrm{rg}(\mathcal{E}) = 2$ (ver Hartshorne II.7, Ejercicio 7.10).

$\boxed{\text{Ejercicio}}$* Sea $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to X$ como antes.

① Probar que $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \simeq \mathbb{P}(\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2)$ con $\mathcal{L}_i \in \mathrm{Pic}(X) \iff \exists\, \sigma_1, \sigma_2 : X \to \mathbb{P}(\mathcal{E})$ secciones <u>disjuntas</u>.

② Probar que $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \simeq X \times \mathbb{P}^1 \iff \exists\, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 : X \to \mathbb{P}(\mathcal{E})$ secciones <u>disjuntas</u>.

Supongamos que $X = B$ es una curva. Entonces, $F = \pi^{-1}(b)$ es un divisor y se tiene que $NS(\mathbb{P}(\mathcal{E}))_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}f \oplus \mathbb{R}\xi$, con $f = [F]$ y $\xi = [\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)]$.
Además, se calcula:

$$f^2 = 0 \ , \ \xi \cdot f = 1 \ , \ \xi^2 = \deg(\mathcal{E}) \stackrel{\text{def}}{=} \deg(\det(\mathcal{E}))$$

Además: $\mathrm{Nef}(\mathbb{P}(\mathcal{E})) = \langle \xi - \mu_{min}(\mathcal{E}) f, f \rangle$ (Hartshorne 1971) y
$\overline{\mathrm{Eff}}(\mathbb{P}(\mathcal{E})) = \langle \xi - \mu_{max}(\mathcal{E}) f, f \rangle$ (Miyaoka 1987).

Aquí, $\mu_{min}(\mathcal{E})$ y $\mu_{max}(\mathcal{E})$ son definidos como sigue:

Si $\mathcal{E} \to C$ fibrado vectorial de rango r y grado $d = \deg(\mathcal{E})$, se define su <u>pendiente</u> como $\mu(\mathcal{E}) := d/r \in \mathbb{Q}$. Decimos que $\mathcal{E}$ es <u>semi-estable</u> si para todo subfibrado $0 \neq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ se tiene que $\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{E})$.

<u>Hecho</u> (Harder-Narasimhan $\simeq$ 1980): Todo fibrado $\mathcal{E} \to C$ admite una filtración <u>única</u>

$$HN.(\mathcal{E}) : 0 = \mathcal{E}_\ell \subsetneq \mathcal{E}_{\ell-1} \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{E}_1 \subsetneq \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$$

donde $Q_i := \mathcal{E}_{i-1}/\mathcal{E}_i$ semi-estable de pendiente μ_i verificando

$$\mu_{min}(\mathcal{E}) := \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_{\ell-1} < \mu_\ell =: \mu_{max}(\mathcal{E}).$$

<u>Obs</u>: En particular, $\mathcal{E}$ semi-estable $\iff \mathrm{Nef}(\mathbb{P}(\mathcal{E})) = \overline{\mathrm{Eff}}(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ (cf. Hartshorne §V.2): Usar lo anterior para determinar el cono nef y el cono pseudo-efectivo de $\mathbb{F}_m$.