II. Links de Sarkisov y el 2-ray game

Vimos que los modelos minimales **no** son únicos si $\kappa = -\infty$. Por otra parte, tenemos:

Teorema (Programa de Sarkisov en dim 2): Sean X, X' superficies proy suaves y sea

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "f", "\sim"'] \arrow[d, "\varphi"'] & X' \arrow[d, "\varphi'"] \\ Z & Z' \end{tikzcd}$$

aplicación birracional entre dos MFS φ y φ'. Entonces, f se descompone usando finitos links de Sarkisov del siguiente tipo:

$$\text{(I)}\ \begin{tikzcd} \mathbb{P}^2 \arrow[r, dashed, "\varepsilon^{-1}"] \arrow[d] & \mathbb{F}_1 \arrow[d] \\ \{pt\} & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd} \qquad \text{(II)}\ \begin{tikzcd} \mathbb{P}(\mathcal{E}) \arrow[r, dashed, "\text{elem.}", "\text{transf.}"'] \arrow[d] & \mathbb{P}(\mathcal{E}') \arrow[d] \\ B \arrow[r, "Id_B"] & B \end{tikzcd} \qquad \text{(III)}\ \begin{tikzcd} \mathbb{F}_1 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d] & \mathbb{P}^2 \arrow[d] \\ \mathbb{P}^1 & \{pt\} \end{tikzcd} \qquad \text{(IV)}\ \begin{tikzcd} \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1 \arrow[r, "Id", "\sim"'] \arrow[d, "pr_1"'] & \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1 \arrow[d, "pr_2"] \\ \mathbb{P}^1 & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

Estrategia (untwisting): Considerar $\varphi' : X' \to Z'$ fijo y medir qué tal lejos está f de ser un isomorfismo de MFS mediante el grado de Sarkisov:

$$\deg_{Sar}(f) = (\mu, \lambda, \ell) \in (\mathbb{Q}^{\geq 0})^3 \quad (\text{de hecho, } \tfrac{1}{6}\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N})$$

Veremos que podemos medir si f es un isomorfismo (Teo. de Noether-Fano-Iskovskikh) y de no serlo produciremos links (2-ray game) que disminuyen $\deg_{Sar}(f)$ resp. al orden lexicográfico, y estos últimos verifican la Descending Chain Condition (DCC). Así:

$$f: \begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "\text{link}"] \arrow[d, "\varphi"'] & X_1 \arrow[r, dashed, "\text{link}"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, dashed, "\text{link}"] & X' \arrow[d, "\varphi'"] \\ Z & Z_1 & & Z' \end{tikzcd} \quad \text{con} \quad \begin{tikzcd} X_i \arrow[r, dashed, "f_i"] \arrow[d] & X' \arrow[d] \\ Z_i & Z' \end{tikzcd} \quad \text{tq} \quad \deg_{Sar}(f) > \deg_{Sar}(f_1) > \deg_{Sar}(f_2) > \dots$$

Hoy nos enfocaremos en definir $\deg_{Sar}(f)$ y dar ejemplos:

Consideremos $\varphi' : X' \to Z'$ fijo y fijemos también $A' \in \mathrm{Pic}(Z')$ amplio y $\mu' \in \mathbb{Q}^{>0}$ tal que $H' := -\mu' K_{X'} + (\varphi')^* A' \in \mathrm{Pic}(X')$ sea **muy amplio** (cf. Kollár-Mori, Prop 1.45).

Ejemplo: si $X' = \mathbb{P}^2$ y $Z' = \{pt\}$, elegimos $A' = 0$, $\mu' = \frac{1}{3}$ y así $H' = L$ recta en $\mathbb{P}^2$.

Ejercicio Encontrar **todos** los H' en $X' = \mathbb{F}_m$ (Hint: $\mathbb{F}_m$ sup. tórica, luego "amplio" $\Leftrightarrow$ "muy amplio").

Consideremos una resolución de $f : X \dashrightarrow X'$ (cf. Beauville, Coro II.12)

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "\sigma'"] & \\ X \arrow[rr, dashed, "f"] & & X' \end{tikzcd} \quad \text{con } f = \sigma' \circ \sigma^{-1}$$

Def: Dado $D' \in |H'|$, definimos su **transformada homaloidal** como $D := \sigma_* \sigma'^* D'$ en X.
Dichos divisores forman un sistema lineal que denotamos $f^{-1}|H'| \subseteq |D|$ (en gral, $\subsetneq$).

Ejercicio Probar que D es indep. de la resolución de f (Hint: Considerar $Y' \xrightarrow{\text{blow up}} Y$).

(1°) **Threshold quasi-efectivo μ**: Se define $\mu \in \mathbb{Q}$ mediante:

$$\mu K_X + D \equiv_\varphi 0 \quad \text{, i.e., } (\mu K_X + D)\cdot\Gamma = 0 \quad \forall\, \Gamma \subseteq X \text{ curva tq } \varphi(\Gamma) = \{pt\} \text{ en } Z.$$

Vimos que si $X \simeq \mathbb{P}^2$ (resp. $\mathbb{P}(\mathcal{E})$) y $\Gamma = L$ recta (resp. F fibra) $\Rightarrow K_X\cdot\Gamma = -3$ (resp -2).

Notar que $\dim Bs|D| \leq 0$ (Ejercicio) y luego D **nef** (Obs (Zariski, 1962): D semi-amplio).

$$\Rightarrow \mu = \mu(f) = D\cdot\Gamma \,/\, (-K_X\cdot\Gamma) \in \tfrac{1}{6}\mathbb{N}.$$

⚠ En dim 3, Corti requiere usar el acotamiento de var. de Fano (cf. Birkar, BAB) para controlar μ. Sin embargo, Hacon-McKernan (2013) usan BCHM (2010) para evitar hacerlo.

Ejemplo: $f : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, $[x,y,z] \mapsto [yz, xz, xy]$ transf. de Cremona clásica.
f no está def en $p = [1,0,0]$, $q = [0,1,0]$ y $r = [0,0,1]$. Consideramos

$$\begin{tikzcd} & Y = Bl_{p,q,r}(\mathbb{P}^2) \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "\sigma'"] & \\ X = \mathbb{P}^2 \arrow[rr, dashed, "f"] & & X' = \mathbb{P}^2 \supseteq D' \in |H'| = |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)| \end{tikzcd}$$

$D' = V(s)$ con $s = ax+by+cz$
$\Rightarrow D = V(\sigma)$ con $\sigma = ayz + bxz + cxy$

$\Rightarrow f^{-1}|H'| = |2L - p - q - r| \subsetneq |D| = |2L|$ y así $\mu = \dfrac{D \cdot L}{-K_{\mathbb{P}^2} \cdot L} = \dfrac{2}{3}$.

⚠ Slogan: "$f^{-1}|H'|$ consiste en «twisted lines». Programa de Sarkisov es el «untwisting»".

② La multiplicidad maximal λ: Si el sistema lineal $f^{-1}|H'|$ no tiene puntos de base, definimos $\lambda = \lambda(f) := 0$. Si $Bs(f^{-1}|H'|) = \{p_1, \dots, p_l\}$ definimos:

$$\lambda = \lambda(f) := \max_{i=1,\dots,l} \{ mult_{p_i}(D),\ D \in f^{-1}|H'| \text{ miembro general} \} \in \mathbb{N}$$

Ejemplo: Si $f : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ Cremona clásica, entonces $\lambda = 1$.

③ N° de divisores crepantes l: Sea $D \in f^{-1}|H'|$ miembro general. La idea será estudiar el par (X, Δ_X) con $\Delta_X = \frac{1}{\lambda} D$. Para ello escribamos:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "\sigma'"] & \\ X \arrow[rr, dashed, "f"] & & X' \end{tikzcd}$$

$$K_Y = \sigma^* K_X + \sum_{k=1}^{n} a_k E_k \quad \text{y} \quad D_Y := \sigma'^* D' = \sigma^* D - \sum_{k=1}^{n} b_k E_k$$

donde los E_k son las curvas exep. de σ y donde $a_k, b_k \geq 0$.

$$\Rightarrow K_Y + \Delta_Y := K_Y + \tfrac{1}{\lambda} D_Y = \sigma^*(K_X + \Delta_X) + \sum_{k=1}^{n} \delta_k E_k \quad \text{con } \delta_k = a_k - \frac{b_k}{\lambda} \in \mathbb{Q}$$

Así, para $\lambda > 0$ definimos $l = l(f) := \#\{E_k \text{ tq } \delta_k = 0, \text{ i.e., } \lambda = \frac{b_k}{a_k}\} \in \mathbb{N}$.
Si $\lambda = 0$, decimos que $l = *$ está indefinido.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que $l(f)$ es indep. de la resol. de f y probar que si $f : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ es la transf. de Cremona clásica entonces $l = 3$.

Obs útil (λ versus l): Se tiene que $\lambda = \max_{k=1,\dots,n} \{\frac{b_k}{a_k}\}$. En part, $\lambda = 0 \Leftrightarrow f^{-1}|H'|$ no tiene puntos de base, y si $\lambda > 0$ entonces $l > 0$. Para ello, basta ver que si $p_1 \in X$ es un punto "de verdad" y $p_2, \dots, p_j$ son puntos infinitamente cerca de p_1:
sean $E_1, \dots, E_j \subseteq Y$ con E_i transf. estricta del divisor exep. del blow-up de p_i, y luego con transf. totales: $E_1 + \dots + r_1 E_j$, $E_2 + \dots + r_2 E_j$, $\dots$, $E_{j-1} + r_{j-1} E_j$, E_j y $r_i \in \mathbb{N}^{\geq 1}$
$\Rightarrow a_1 = 1$ y $a_j = r_1 + r_2 + \dots + r_{j-1} + 1$. Además, $f^{-1}|H'|$ tiene mult m_i en p_i donde $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_j \Rightarrow b_1 = m_1$ y $b_j = r_1 m_1 + \dots + r_{j-1} m_{j-1} + m_j$.
Así: $b_1/a_1 = m_1$ y $b_j/a_j \leq m_1$ ✓ En part, $\delta_k \geq 0$ (i.e., (X, Δ_X) canonical).

El 2-ray game (cf. transf. elementales): Como $\rho_X - \rho_Z = 1$, $NS(X/Z)_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$.

① Caso $\lambda > \mu$: Sea $p \in X$ tal que $\lambda = mult_p(D)$, y sea $W := Bl_p(X) \to X$.
Entonces, $\rho_W - \rho_Z = 2$ y luego $NS(W/Z) \cong \mathbb{R}^2 \Rightarrow \overline{NE}(W/Z)$ posee 2 rayos extremales.
El primer rayo corresp. a $W \to X$, y el segundo rayo nos dará:
(a) MFS $W \to T$ (Tipo I), o bien
(b) Contr. divisorial $W \to W'$ y $W' \to Z$ MFS (Tipo II).

② Caso $\lambda \leq \mu$: Veremos que $K_X + \frac{1}{\mu} D$ no es nef y luego X admite una 2^{da} contracción:
(c) Otro MFS $X \to T$ (Tipo IV). $\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que $X \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ en este caso.
(d) Contr. divisorial $X \to W$ y luego $W \cong \mathbb{P}^2$ (Tipo III).

Comentarios adicionales: La siguiente es una versión concreta del Teorema de Noether-Fano-Iskovskikh en el caso de $\mathbb{P}^2$:

Sea $S \simeq \mathbb{P}^2$ o $\mathbb{F}_n$ y sea $f : S \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ aplicación birracional. Supongamos que f no es un isomorfismo y que $K_S + \frac{1}{\mu} D$ es nef, donde $D \in f^{-1}|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)|$ elemento general. Entonces, $f^{-1}|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)|$ posee un punto base de mult $> \mu$.

En efecto, si consideramos la resolución de f

$$\begin{array}{ccccc} & & Y \supseteq l & & \text{transf. estricta de } L \\ & \swarrow^{\sigma} & & \searrow^{\sigma'} & \\ S & & \overset{f}{\dashrightarrow} & & \mathbb{P}^2 \supseteq L \quad \text{recta general} \end{array}$$

Como f no es un isomorfismo $\Rightarrow \mu > \dfrac{L \cdot L}{-K_{\mathbb{P}^2} \cdot L} = \dfrac{1}{3}$, ie, $0 > \left(K_{\mathbb{P}^2} + \frac{1}{\mu} L\right) \cdot L$

Sean E_i (resp E_j') los divisores excepcionales de σ (resp. de σ') y escribamos

$$K_Y + \frac{1}{\mu} D_Y = \sigma^* \left(K_S + \frac{1}{\mu} D\right) + \sum_i \left(a_i - \frac{b_i}{\mu}\right) E_i$$
$$= \sigma'^* \left(K_{\mathbb{P}^2} + \frac{1}{\mu} L\right) + \sum_j c_j E_j'$$

Dado que L es general, $E_i \cdot l \geq 0 \ \forall i$. Además, $E_j' \cdot l = 0 \ \forall j$ por la fórmula de la proyección. Así:

$$\left(K_Y + \frac{1}{\mu} D_Y\right) \cdot l = \underbrace{\left(K_{\mathbb{P}^2} + \frac{1}{\mu} L\right) \cdot L}_{<0} = (\text{Algo nef}) \cdot l + \sum_i \left(a_i - \frac{b_i}{\mu}\right) E_i \cdot l$$

$\Rightarrow \exists i$ tal que $\left(a_i - \frac{b_i}{\mu}\right) < 0$, ie, $\frac{b_i}{a_i} > \mu$. Por la Obs útil, podemos asumir que este coef. negativo se realiza en un punto (de verdad) $p \in S$, y luego $a_i = 1$ y $b_i = \text{mult}_p(D)$, con lo que $\text{mult}_p(D) > \mu$ ■

Obs: En particular, $\lambda > \mu$ en este caso. Además, la demostración puede reformularse diciendo que el par $(S, \frac{1}{\mu} D)$ no es canónico. Esto último es la forma de generalizar el resultado a dimensión superior.