III. Teorema de Noether - Fano - Iskovskikh

[Lectura recomendada: • J. Kollár "The rigidity theorem (...)" (arXiv 1807.00863).
• I. Cheltsov "Birationally rigid Fano varieties".

Recordemos la notación relevante hasta ahora: sea f mapa birracional entre MFS de dim 2

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "\sigma'"] & \\ X \arrow[rr, dashed, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & & X' \arrow[d, "\varphi'"] \\ Z & & Z' \end{tikzcd}$$

• Fijamos la resol. Y de f y asumamos σ' dado por nº min. de blow-ups
• Fijamos $\mu' \in \mathbb{Q}^{>0}$ y $A' \in \mathrm{Pic}(Z')$ amplio tq $H' := -\mu' K_{X'} + (\varphi')^* A'$ sea muy amplio en X'.
• Para $D' \in |H'|$ general, se define $D := \sigma_* \sigma'^* D'$ y $f^{-1}|H'| = \sigma_* \sigma'^* |H'|$.

• $\mu = \mu(f) \in \frac{1}{6}\mathbb{N}^{\geq 1}$ verifica $(\mu K_X + D)\cdot \Gamma = 0$, i.e., $\mu = D\cdot\Gamma / (-K_X \cdot \Gamma)$ $\forall \Gamma$ contraída por φ.

• Si $\mathrm{Exc}(\sigma) = E_1 \cup \ldots \cup E_m$ y escribimos $K_Y = \sigma^* K_X + \sum_{k=1}^m a_k E_k$ y $D_Y := \sigma'^* D' = \sigma^* D - \sum_{k=1}^m b_k E_k$

$\Rightarrow \lambda := \max_k \{ b_k / a_k \}$ y vimos que si $Bs(f^{-1}|H'|) = \{p_1, \ldots, p_\ell\}$ entonces $\lambda = \max_{j=1,\ldots,\ell} \{ \mathrm{mult}_{p_j}(D)\}$.

[**Teorema** (Noether 1870, Fano 1915, Iskovskikh ≈ 70s): Supongamos que $\lambda \leq \mu$ y que el divisor $K_X + \frac{1}{\mu} D$ es nef. Entonces, f es un isomorfismo de MFS.

⚠ La demostración que daremos se adapta casi literal al caso de 3-folds (cf. Matsuki, Ch. 13) y se basa en el resultado de Iskovskikh-Manin (1971) que afirma que $\mathrm{Bir}(X) \cong \mathrm{Aut}(X)$ para $X \subseteq \mathbb{P}^4$ hipersup. suave de grado 4 ("problema de Lüroth").

Dem del Teorema: $\boxed{\text{Paso 1}}$ Probar que $\mu = \mu'$: $H' + \mu' K_{X'} = (\varphi')^* A'$ es muy amplio en X'.

Veamos que siempre $\mu' \leq \mu$: si $\varepsilon \in \mathbb{Q}^{>0}$ entonces para $D' \in |H'|$ general se tiene que $(1+\varepsilon) D' + \mu' K_{X'} \sim \varepsilon D' + (\varphi')^* A'$ es amplio + nef = amplio, i.e., $\forall t \in]0, \mu'[$ el divisor $L' := \frac{1}{t} D' + K_{X'}$ es amplio $\Rightarrow L := \sigma_* \sigma'^* L$ es tq $L \cdot \Gamma > 0$ $\forall \Gamma \subseteq X$ fibra de $\varphi : X \to Z$. Calculemos L explícitamente:

$$(\sigma')^* \left(\tfrac{1}{t} D' + K_{X'}\right) = \tfrac{1}{t} (\sigma')^* D' + K_Y - E' \quad \text{con } E' = \mathrm{Exc}(\sigma') \geq 0$$

$$= \tfrac{1}{t} (\sigma')^* D' + \left(\sigma^*(K_X) + \sum_{k=1}^m a_k E_k - E'\right)$$

$\Rightarrow L = \frac{1}{t} D + K_X - \sigma_*(E')$. Así, dado que $\Gamma \subseteq X$ es nef se tiene que

$$\left(\tfrac{1}{t} D + K_X\right)\cdot \Gamma = L\cdot\Gamma + \underbrace{\sigma_*(E')\cdot\Gamma}_{\geq 0} \geq L \cdot \Gamma > 0, \text{ i.e., } (D + tK_X)\cdot\Gamma > 0 \ \forall t \in]0, \mu'[$$

y así $\mu' \leq \mu$ ✓ Veamos que si $K_X + \frac{1}{\mu} D$ es nef entonces $\mu \leq \mu'$: Sea $\Gamma' \subseteq X'$ fibra de $\varphi' : X' \to Z'$ $\Rightarrow (D' + tK_{X'})\cdot\Gamma' = ((\varphi')^* A' + (t-\mu')K_{X'})\cdot \Gamma' \underset{\text{proy}}{=} (t - \mu')\underbrace{K_{X'}\cdot\Gamma'}_{<0} < 0$ para todo $t > \mu'$, i.e., $\left(\frac{1}{t} D' + K_{X'}\right)$ no es nef $\forall t > \mu'$.

$\Rightarrow \frac{1}{t} D + K_X - \sigma_*(E')$ no es nef $\forall t > \mu'$. Más aún, si $C := \sigma_* \sigma'^* \Gamma'$ entonces $C \cdot \sigma_*(E') \overset{\text{proy}}{=} \sigma^* C \cdot E' = (\sigma')^* \Gamma' \cdot E' = \Gamma' \cdot \sigma'_*(E') \overset{\text{def}}{=} 0$. Luego, $\forall t > \mu'$ se tiene

$\left(\frac{1}{t} D + K_X\right)\cdot C = \left(\frac{1}{t} D + K_X - \sigma_*(E')\right)\cdot C < 0$. Como $K_X + \frac{1}{\mu} D$ nef, tenemos $\mu \leq \mu'$ ✓

$\boxed{\text{Paso 2}}$ Probar que $\sigma^*\left(K_X + \frac{1}{\mu} D\right) = \sigma'^*\left(K_{X'} + \frac{1}{\mu} D'\right)$: Escribamos

$(\star_1)$ $K_Y + \frac{1}{\mu} D_Y = \sigma^*\left(K_X + \frac{1}{\mu} D\right) + \sum_{k=1}^m \delta_k E_k$ con $\delta_k := a_k - \frac{b_k}{\mu} \overset{\lambda \leq \mu}{\geq} a_k - \frac{b_k}{\lambda} \geq 0$ y además $\sum_{k=1}^m \delta_k E_k \leq R := \sum_{k=1}^m a_k E_k$. Del mismo modo:

$(\star_2)$ $K_Y + \frac{1}{\mu} D_Y = \sigma'^*\left(K_{X'} + \frac{1}{\mu} D'\right) + R'$ con $R' = \sum_{j=1}^m \delta'_j E'_j$ y $\delta'_j \in \mathbb{N}$.

Para probar que $\sum_{k=1}^{m} \delta_k E_k = \sum_{j=1}^{m} \delta'_j E'_j$ consideremos $F_\ell \in \{E_1, \dots, E_m, E'_1, \dots, E'_m\}$ y denotemos:

$$\ell \in \begin{Bmatrix} I_\sigma \\ I_{\sigma'} \\ I_{\sigma,\sigma'} \end{Bmatrix} \text{ si } \begin{Bmatrix} \sigma(F_\ell) = \{pt\},\ \sigma'(F_\ell) \neq \{pt\} \\ \sigma(F_\ell) \neq \{pt\},\ \sigma'(F_\ell) = \{pt\} \\ \sigma(F_\ell) = \{pt\} \text{ y } \sigma'(F_\ell) = \{pt\} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{m} \delta_k E_k \overset{\text{dy}}{=} \sum_{\ell \in I_\sigma} \delta_\ell F_\ell + \sum_{\ell \in I_{\sigma,\sigma'}} \delta_\ell F_\ell \\ \sum_{j=1}^{m} \delta'_j E'_j \overset{\text{dy}}{=} \sum_{\ell \in I_{\sigma'}} \delta'_\ell F_\ell + \sum_{\ell \in I_{\sigma,\sigma'}} \delta'_\ell F_\ell \end{array}$$

Así, $(\star_1) = (\star_2)$ equivale a que:

$$M := \sum_{\ell \in I_\sigma} \delta_\ell F_\ell + \sum_{\ell \in I_{\sigma,\sigma'}} (\delta_\ell - \delta'_\ell) F_\ell = \sigma'^*\left(K_{X'} + \tfrac{1}{\mu} D'\right) - \sigma^*\left(K_X + \tfrac{1}{\mu} D\right) + \sum_{\ell \in I_{\sigma'}} \delta'_\ell F_\ell$$

$$M' := \sum_{\ell \in I_{\sigma'}} \delta'_\ell F_\ell + \sum_{\ell \in I_{\sigma,\sigma'}} (\delta'_\ell - \delta_\ell) F_\ell = \sigma^*\left(K_X + \tfrac{1}{\mu} D\right) - \sigma'^*\left(K_{X'} + \tfrac{1}{\mu} D'\right) + \sum_{\ell \in I_\sigma} \delta_\ell F_\ell$$

<u>Hecho</u> ("Negativity Lemma", Kollár-Mori Lemma 3.39): Sea $g : S \to T$ morfismo birracional entre sup. proy suaves y sea $\mathrm{Exc}(g) = E_1 \cup \dots \cup E_r$. Si $M = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k E_k$ cumple $M \cdot E_i \geq 0$ para todo $i \in \{1, \dots, r\} \Rightarrow \lambda_k \leq 0 \ \forall k \in \{1, \dots, r\}$.

Si F_s es σ-excepcional (i.e, $s \in I_\sigma \cup I_{\sigma,\sigma'}$) entonces, como $K_{X'} + \frac{1}{\mu} D' \overset{\mu = \mu'}{=} \frac{1}{\mu} (\varphi')^* A'$ es <u>my</u>:

$$M \cdot F_s = \underbrace{\sigma'^*\left(K_{X'} + \tfrac{1}{\mu} D'\right) \cdot F_s}_{\geq 0} - \underbrace{\sigma^*\left(K_X + \tfrac{1}{\mu} D\right) \cdot F_s}_{= 0 \text{ (proy. formula)}} + \underbrace{\Big(\sum_{\ell \in I_{\sigma'}} \delta'_\ell F_\ell\Big) \cdot F_s}_{\geq 0} \geq 0$$

$\overset{\text{Hecho } g = \sigma}{\Longrightarrow}$ $\delta_\ell \leq 0$ si $\ell \in I_\sigma$ y $\delta_\ell \leq \delta'_\ell$ si $\ell \in I_{\sigma,\sigma'}$. De manera análoga, se tiene $\delta'_\ell \leq 0$ si $\ell \in I_{\sigma'}$ y $\delta'_\ell \leq \delta_\ell$ si $I_{\sigma,\sigma'}$. Así, $\sigma^*\left(K_X + \frac{1}{\mu} D\right) = \sigma'^*\left(K_{X'} + \frac{1}{\mu} D'\right)$ ✓

Paso 3 Probar que f es un isom. de MFS: $R = \sum a_k E_k \geq \sum \delta_k E_k = \sum \delta'_j E'_j = R'$ y luego $\mathrm{Exc}(\sigma') \subseteq \mathrm{Exc}(\sigma)$. Como σ' es minimal, $\sigma' = \mathrm{Id}$ y $Y = X'$. Luego, $\sigma = f^{-1}$. Consideremos $h : X' \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{\varphi} Z$ y sea $\Gamma' \subseteq X'$ una fibra de h. Como φ tiene fibras conexas, Γ' es conexa. Además:

$$0 \overset{\text{dy de } \mu}{=} \sigma^*\left(K_X + \tfrac{1}{\mu} D\right) \cdot \Gamma' \overset{\text{Pasos 1 \& 2}}{=} \underbrace{(\sigma'^*)}_{\mathrm{Id}^*}\left(K_{X'} + \tfrac{1}{\mu} D'\right) \cdot \Gamma' = \tfrac{1}{\mu} (\varphi')^* A \cdot \Gamma'$$

y así $\varphi'(\Gamma') \overset{\Gamma' \text{ conexa}}{=} \{z'\}$. La función $g : Z \to Z'$, $z \mapsto \varphi'(h^{-1}(z))$ está bien definida y es un morfismo <u>regular</u> (ver Matsuki, Lemma 1.8.1). El diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X' \arrow[l, "\sigma = f^{-1}"'] \arrow[d, "\varphi'"] \\ Z \arrow[r, "g"] & Z' \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Si f^{-1} <u>no</u> fuera un isomorfismo, $\exists E \subseteq X'$ tq $\sigma(E) = f^{-1}(E') = \{pt\}$. El diagrama implica que $\varphi'(E) = \{pt\}$ lo cual es imposible (Teo. del cono!). Así, σ' es un isomorfismo ✓ Por último, el diagrama implica que $\deg(g) = 1$ y luego g es un isomorfismo ✓ Así, f es un isom. de MFS ∎

<u>Obs práctica</u>: En el contexto del Programa de Sarkisov, el Teorema anterior implica que dado $f : X \dashrightarrow X'$ morfismo de MFS debemos preguntarnos: ¿$\lambda \leq \mu$?

(1°) <u>No</u> (i.e, $\lambda > \mu$): Jugaremos el 2-ray game en $Bl_p(X)$ con $\lambda = \mathrm{mult}_p(D)$.

(2°) <u>Sí</u>: Nos preguntamos ¿$K_X + \frac{1}{\mu} D$ my? En caso afirmativo, el programa se acaba (f isom.). En caso negativo, jugaremos el 2-ray game en X. Estudiaremos como varía $\deg_{\mathrm{Sar}}(f) = (\mu, \lambda, \ell)$ al realizar links de Sarkisov!