EJERCICIOS SOBRE EL PROGRAMA DE SARKISOV
SEMINARIO GEOMETRÍA ALGEBRAICA UC

JAIME NEGRETE

Para el desarrollo de estas notas ocuparé las notas del Seminario Sarkisov del profesor Pedro Montero.

Consideremos $\varphi\colon X' \to Z'$ fijo y fijemos $A' \in \mathrm{Pic}(Z')$ amplio y $\mu \in \mathbb{Q}^{>0}$ tal que $H' := -\mu' K'_X + (\varphi')^* A' \in \mathrm{Pic}(X')$ sea muy amplio.
Recordemos que tenemos la siguiente definición:

Definition 0.1. Consideremos una resolución de $f\colon X \dashrightarrow X'$

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "\sigma'"] & \\ X \arrow[rr, dashed, "f"] & & X' \end{tikzcd}$$

con $f = \sigma' \circ \sigma^{-1}$. Dado $D' \in |H'|$ definimos su transformada homaloidal como $D := \sigma_* \sigma'^* D'$ en X. Dichos divisores forman un sistema lineal que denotamos por $f^{-1}|H| \subset |D|$ (en general $\not\subseteq$).

Para el desarrollo de algunos calculos será importante la siguiente fórmula.

Definition 0.2. (Fórmula de Proyección) Dado $f\colon X \to Y$ un morfismo regular entre variedades algebraicas proyectivas irreducibles y $C \subseteq X$ curva irreducible. Definimos el grado de C respecto a f como $\deg_f(C)$, donde $deg_f(C) = 0$ si $f(C) = \{pt\}$ y como $deg(f|_C : C \to f(C))$ si $f(C) \subset Y$ curva irreducible, donde $deg(f|_C) := [K(C) : k(f(C))]$. La fórmula de proyección nos dice que para todo divisor de Cartier D en $Div(Y)$ tenemos que:

$$f^* D \cdot C = deg_f(C)(D \cdot f(C))$$

En primer lugar de la charla veremos el Teorema de Noether-Fano-Iskovskikh en el caso de $\mathbb{P}^2$.

Theorem 0.3. *Sea $S \cong \mathbb{P}^2$ o $\mathbb{F}_n$ y sea $f\colon S \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ una aplicación birracional. Supongamos que f No es un isomorfismo y que $K_S + \frac{1}{\mu}D$ es nef, donde $D \in f^{-1}|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)|$ es un elemento general. Entonces, $f^{-1}|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)|$ posee un punto base de multiplicidad $> \mu$.*

Remark 0.4. Recordar que μ es el "quasi-effective threshold" definido en el seminario anterior.

Proof. Consideremos una resolución de f

$$\begin{tikzcd} & Y \supseteq \ell \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "\sigma'"] & \\ S \arrow[rr, dashed, "f"] & & \mathbb{P}^2 \supseteq L \text{ recta general} \end{tikzcd}$$

con ℓ la transformada estricta de L. Como f No es un isomorfismo, entonces $\mu > \frac{L \cdot L}{-K_{\mathbb{P}^2} \cdot L} = \frac{1}{3}$,i.e $0 > (K_{\mathbb{P}^2} + \frac{1}{\mu}L) \cdot L$.

Sean E_i y $(E_{j'})$ los divisores excepcionales de σ y σ' respectivamente, y escribamos (aquí usaremos que $D = \sigma_* \sigma'^*(L)$ y fórmula de proyección):

$$K_Y = \sigma^* K_S + \sum_{i=1}^{n} a_i E_i \quad y \quad D_Y := \sigma'^* L = \sigma^* D - \sum_{i=1}^{n} b_i E_i$$

Luego,

$$\begin{aligned} K_Y + \frac{1}{\mu} D_Y &= \sigma^* \left(K_S + \frac{1}{\mu} D \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(a_i - \frac{b_i}{\mu} \right) E_i \\ &= \sigma'^* \left(K_{\mathbb{P}^2} + \frac{1}{\mu} L \right) + \sum_j c_j E'_j \end{aligned}$$

Dado que L es general, $E_i \cdot \ell \geq 0 \forall i$. Además como E'_j es excepcional para σ' tenemos que $E'_j \cdot \ell = 0 \forall j$ por la fórmula de proyección. Por lo que

$$\begin{aligned} \left(K_Y + \frac{1}{\mu} D_Y \right) \cdot \ell &= \left(\sigma'^* \left(K_{\mathbb{P}^2} + \frac{1}{\mu} L \right) + \sum_j c_j E'_j \right) \cdot \left(\sigma'^*(L) - \sum_j d'_j E_j \right) \\ &= \left(K_{\mathbb{P}^2} + \frac{1}{\mu} L \right) \cdot L < 0 \end{aligned}$$

Mientras que por otro lado tenemos

$$\left(K_Y + \frac{1}{\mu} D_Y \right) \cdot \ell = \underbrace{\sigma^* \left(K_S + \frac{1}{\mu} D \right) \cdot \ell}_{\geq 0} + \sum_{i=1}^{n} \left(a_i - \frac{b_i}{\mu} \right) \underbrace{E_i \cdot \ell}_{\geq 0}$$

Donde $\sigma^*(K_S + \frac{1}{\mu} D) \cdot \ell \geq 0$ ya que $\sigma^*(K_S + \frac{1}{\mu} D)$ es el pullback de un divisor nef. Por lo tanto existe algún i tal que $a_i - \frac{b_i}{\mu} < 0$. Por el argumento dado 2 seminarios antes, podemos asumir que este coeficiente negativo se realiza en un punto (de verdad) $p \in S$, luego $a_i = 1$ y $b_i = mult_p(D)$ y por lo tanto usando la desigualdad anterior y el hecho que $\mu \in \frac{1}{6}\mathbb{N}$ tendremos que $mult_p(D) > \mu$.

□

La otra parte del seminario será probar el "Negativity Lemma", el cual fue ocupado en el seminario anterior para demostrar la versión general del Teorema de Noether-Fano-Iskovskikh. A continuación voy a citar algunos resultados conocidos que serán de ayuda.

Theorem 0.5. *(Hodge Index theorem)*
Sea H un divisor amplio en una superficie X, y supongamos que D es un divisor con $D \not\equiv 0$ y $D \cdot H = 0$. Luego $D^2 < 0$.

Proof. [H, Teorema 1.9, Capitulo V] □

Remark 0.6. Por el Teorema de Nerón-Severi tenemos que $V = Num(X) \otimes_Z \mathbb{R}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial finito dimensional de dimensión $\rho = rank\ NS(X)$, además el numero de intersección induce $Num(X) \times Num(X) \to \mathbb{Z}$ y así tenemos una forma bilineal simetrica no degenerada en V. Si h es la clase en V de un divisor amplio en X, podemos obtener una base de V sobre $\mathbb{R}$ digamos $h, h_1, \cdots, h_\rho$ de tal forma que $(h \cdot h_i) = 0$ para cada $i \geq 2$. Por el Teorema anterior tenemos que la forma bilineal $(\cdot)$ tiene signatura $(1, \rho - 1)$. Además por el Teorema de Sylvester (teorema conocido de álgebra lineal) tenemos invarianza de la signatura de la forma bilineal simetrica $(\cdot)$. Por lo tanto podemos enunciar el teorema como sigue

Theorem 0.7. *(Hodge Index Theorem)*
La forma de intersención en S tiene signatura $(1, \rho(S) - 1)$, donde $\rho(S) = dim_{\mathbb{R}}$. En particular, si $E \not\equiv 0$ tiene intersección $D \cdot E = 0$ para un divisor con $D^2 > 0$, luego $E^2 < 0$.

Theorem 0.8. *(Negatividad de autointersección de curvas contraidas)*
Sea $\phi \colon X \to Y$ un morfismo propio birracional desde una superficie no singular X. Luego para cada divisor E no cero en S con $\phi(E) = \{pt\}$ tenemos que $E^2 < 0$.

Proof. Sea H amplio en Y y sea $D := \phi^*(H)$ (Notar que D es big y nef, pero no es amplio). Luego $D^2 = \phi^*(H) \cdot \phi^*(H) = H^2 > 0$ y $D \cdot E = 0$, pues $f(E) = \{pt\}$. Entonces por la observación anterior se sigue que $E^2 < 0$. □

Remark 0.9. El caso en que Y sea una superficie singular basta tomar alguna sección Hiperplana que no pase por los puntos singulares y luego se sigue el mismo argumento.

Remark 0.10. De hecho lo que tenemos es que si $\{E_i\}$ es un conjunto finito de curvas irreducibles que se contraen por ϕ. La matriz de intersección $(E_i \cdot E_j)_{i,j}$ es negativa definida, ver [KM].

Theorem 0.11. *(Lema de Negatividad en dimensión 2) Sea $f \colon X \to Y$ un morfismo birracional desde una superficie proyectiva no singular X a otra superficie Y. Supongamos que el divisor $E := \sum \alpha_i E_i$ donde los E_i son los divisores excepcionales para f es relativamente nef sobre Y, i.e, $(\sum \alpha_i E_i) \cdot E_i \geq 0 \ \forall E_j$. Entonces $\alpha_i \leq 0 \ \forall i$.*

Proof. Supongamos que $\alpha_i > 0$ para algún i. Luego, tiene sentido considerar el divisor $\sum_{\alpha_i > 0} \alpha_i E_i$ y pensar $\sum \alpha_i E_i = \sum_{\alpha_i \leq 0} \alpha_i E_i + \sum_{\alpha_i > 0} \alpha_i E_i$. Por lo tanto podemos hacer sentido de la siguiente intersección, y usando el Teorema anterior se deduce que:

$$\left(\sum \alpha_i E_i\right) \cdot \left(\sum_{\alpha_i > 0} \alpha_i E_i\right) = \left(\sum_{\alpha_i \leq 0} \alpha_i E_i\right) \cdot \left(\sum_{\alpha_i > 0} \alpha_i E_i\right) + \left(\sum_{\alpha_i > 0} \alpha_i E_i\right)^2 < 0$$

Pero por otro lado, la suposición de que E es relativamente nef sobre Y, implica que

$$0 \leq \left(\sum \alpha_i E_i\right) \cdot \left(\sum_{\alpha_i > 0} \alpha_i E_i\right)$$

Lo cual contradice la desigualdad anterior. □

References

[KM] J. Kollár and S. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 134, Cambridge University Press, Cambridge, 1998. With the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti; Translated from the 1998 Japanese original. MR1658959

[H] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, No. 52, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. MR0463157

[M] K. Matsuki, *Introduction to the Mori program*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2002. MR1875410