

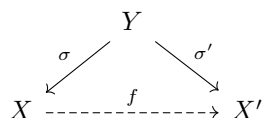
**EJERCICIOS SOBRE EL PROGRAMA DE SARKISOV
SEMINARIO GEOMETRÍA ALGEBRAICA UC**

JAIME NEGRETE

Para el desarrollo de estas notas ocuparé las notas del Seminario Sarkisov del profesor Pedro Montero.

Consideremos $\varphi: X' \rightarrow Z'$ fijo y fijemos $A' \in \text{Pic}(Z')$ amplio y $\mu \in \mathbb{Q}^{>0}$ tal que $H' := -\mu' K'_X + (\varphi')^* A' \in \text{Pic}(X')$ sea muy amplio. Recordemos que tenemos la siguiente definición:

Definition 0.1. Consideremos una resolución de $f: X \dashrightarrow X'$



con $f = \sigma' \circ \sigma^{-1}$. Dado $D' \in |H'|$ definimos su transformada homaloidal como $D := \sigma_* \sigma'^* D'$ en X . Dichos divisores forman un sistema lineal que denotamos por $f^{-1}|H| \subset |D|$ (en general $\not\subset$).

Para el desarrollo de algunos calculos será importante la siguiente fórmula.

Definition 0.2. (Fórmula de Proyección) Dado $f: X \rightarrow Y$ un morfismo regular entre variedades algebraicas proyectivas irreducibles y $C \subseteq X$ curva irreducible. Definimos el grado de C respecto a f como $\deg_f(C)$, donde $\deg_f(C) = 0$ si $f(C) = \{pt\}$ y como $\deg(f|_C : C \rightarrow f(C))$ si $f(C) \subset Y$ curva irreducible, donde $\deg(f|_C) := [K(C) : k(f(C))]$. La fórmula de proyección nos dice que para todo divisor de Cartier D en $\text{Div}(Y)$ tenemos que:

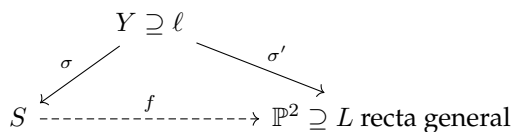
$$f^* D \cdot C = \deg_f(C)(D \cdot f(C))$$

En primer lugar de la charla veremos el Teorema de Noether-Fano-Iskovskikh en el caso de \mathbb{P}^2 .

Theorem 0.3. Sea $S \cong \mathbb{P}^2$ o \mathbb{F}_n y sea $f: S \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ una aplicación birracional. Supongamos que f No es un isomorfismo y que $K_S + \frac{1}{\mu} D$ es nef, donde $D \in f^{-1}|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)|$ es un elemento general. Entonces, $f^{-1}|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)|$ posee un punto base de multiplicidad $> \mu$.

Remark 0.4. Recordar que μ es el "quasi-effective threshold" definido en el seminario anterior.

Proof. Consideremos una resolución de f



con ℓ la transformada estricta de L . Como f No es un isomorfismo, entonces $\mu > \frac{L \cdot L}{-K_{\mathbb{P}^2} \cdot L} = \frac{1}{3}$ i.e $0 > (K_{\mathbb{P}^2} + \frac{1}{\mu} L) \cdot L$.

Sean E_i y (E_j') los divisores excepcionales de σ y σ' respectivamente, y escribamos (aquí usaremos que $D = \sigma_*\sigma'^*(L)$ y fórmula de proyección):

$$K_Y = \sigma^*K_S + \sum_{i=1}^n a_i E_i \quad y \quad D_Y := \sigma'^*L = \sigma^*D - \sum_{i=1}^n b_i E_i$$

Luego,

$$\begin{aligned} K_Y + \frac{1}{\mu}D_Y &= \sigma^* \left(K_S + \frac{1}{\mu}D \right) + \sum_{i=1}^n \left(a_i - \frac{b_i}{\mu} \right) E_i \\ &= \sigma'^* \left(K_{\mathbb{P}^2} + \frac{1}{\mu}L \right) + \sum_j c_j E_j' \end{aligned}$$

Dado que L es general, $E_i \cdot \ell \geq 0 \forall i$. Además como E_j' es excepcional para σ' tenemos que $E_j' \cdot \ell = 0 \forall j$ por la fórmula de proyección. Por lo que

$$\begin{aligned} \left(K_Y + \frac{1}{\mu}D_Y \right) \cdot \ell &= \left(\sigma'^* \left(K_{\mathbb{P}^2} + \frac{1}{\mu}L \right) + \sum_j c_j E_j' \right) \cdot \left(\sigma'^*(L) - \sum_j d_j' E_j' \right) \\ &= \left(K_{\mathbb{P}^2} + \frac{1}{\mu}L \right) \cdot L < 0 \end{aligned}$$

Mientras que por otro lado tenemos

$$\left(K_Y + \frac{1}{\mu}D_Y \right) \cdot \ell = \underbrace{\sigma^* \left(K_S + \frac{1}{\mu}D \right) \cdot \ell}_{\geq 0} + \sum_{i=1}^n \left(a_i - \frac{b_i}{\mu} \right) \underbrace{E_i \cdot \ell}_{\geq 0}$$

Donde $\sigma^*(K_S + \frac{1}{\mu}D) \cdot \ell \geq 0$ ya que $\sigma^*(K_S + \frac{1}{\mu}D)$ es el pullback de un divisor nef. Por lo tanto existe algún i tal que $a_i - \frac{b_i}{\mu} < 0$. Por el argumento dado 2 seminarios antes, podemos asumir que este coeficiente negativo se realiza en un punto (de verdad) $p \in S$, luego $a_i = 1$ y $b_i = \text{mult}_p(D)$ y por lo tanto usando la desigualdad anterior y el hecho que $\mu \in \frac{1}{6}\mathbb{N}$ tendremos que $\text{mult}_p(D) > \mu$. \square

La otra parte del seminario será probar el "Negativity Lemma", el cual fue ocupado en el seminario anterior para demostrar la versión general del Teorema de Noether-Fano-Iskovskikh. A continuación voy a citar algunos resultados conocidos que serán de ayuda.

Theorem 0.5. (Hodge Index theorem)

Sea H un divisor amplio en una superficie X , y supongamos que D es un divisor con $D \not\equiv 0$ y $D \cdot H = 0$. Luego $D^2 < 0$.

Proof. [H, Teorema 1.9, Capitulo V] \square

Remark 0.6. Por el Teorema de Nerón-Severi tenemos que $V = \text{Num}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ es un \mathbb{R} -espacio vectorial finito dimensional de dimensión $\rho = \text{rank } NS(X)$, además el numero de intersección induce $\text{Num}(X) \times \text{Num}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ y así tenemos una forma bilineal simétrica no degenerada en V . Si h es la clase en V de un divisor amplio en X , podemos obtener una base de V sobre \mathbb{R} digamos h, h_1, \dots, h_ρ de tal forma que $(h \cdot h_i) = 0$ para cada $i \geq 2$. Por el Teorema anterior tenemos que la forma bilineal (\cdot) tiene signatura $(1, \rho - 1)$. Además por el Teorema de Sylvester (teorema conocido de álgebra lineal) tenemos invarianza de la signatura

de la forma bilineal simétrica (\cdot) . Por lo tanto podemos enunciar el teorema como sigue

Theorem 0.7. (*Hodge Index Theorem*)

La forma de intersección en S tiene signatura $(1, \rho(S) - 1)$, donde $\rho(S) = \dim_{\mathbb{R}}$. En particular, si $E \neq 0$ tiene intersección $D \cdot E = 0$ para un divisor con $D^2 > 0$, luego $E^2 < 0$.

Theorem 0.8. (*Negatividad de autointersección de curvas contraídas*)

Sea $\phi: X \rightarrow Y$ un morfismo propio bircional desde una superficie no singular X . Luego para cada divisor E no cero en S con $\phi(E) = \{pt\}$ tenemos que $E^2 < 0$.

Proof. Sea H amplio en Y y sea $D := \phi^*(H)$ (Notar que D es big y nef, pero no es amplio). Luego $D^2 = \phi^*(H) \cdot \phi^*(H) = H^2 > 0$ y $D \cdot E = 0$, pues $f(E) = \{pt\}$. Entonces por la observación anterior se sigue que $E^2 < 0$. \square

Remark 0.9. El caso en que Y sea una superficie singular basta tomar alguna sección Hiperplana que no pase por los puntos singulares y luego se sigue el mismo argumento.

Remark 0.10. De hecho lo que tenemos es que si $\{E_i\}$ es un conjunto finito de curvas irreducibles que se contraen por ϕ . La matriz de intersección $(E_i \cdot E_j)_{i,j}$ es negativa definida, ver [KM].

Theorem 0.11. (*Lema de Negatividad en dimensión 2*) Sea $f: X \rightarrow Y$ un morfismo bircional desde una superficie proyectiva no singular X a otra superficie Y . Supongamos que el divisor $E := \sum \alpha_i E_i$ donde los E_i son los divisores excepcionales para f es relativamente nef sobre Y , i.e., $(\sum \alpha_i E_i) \cdot E_j \geq 0 \forall E_j$. Entonces $\alpha_i \leq 0 \forall i$.

Proof. Supongamos que $\alpha_i > 0$ para algún i . Luego, tiene sentido considerar el divisor $\sum_{\alpha_i > 0} \alpha_i E_i$ y pensar $\sum \alpha_i E_i = \sum_{\alpha_i \leq 0} \alpha_i E_i + \sum_{\alpha_i > 0} \alpha_i E_i$. Por lo tanto podemos hacer sentido de la siguiente intersección, y usando el Teorema anterior se deduce que:

$$\left(\sum \alpha_i E_i\right) \cdot \left(\sum_{\alpha_i > 0} \alpha_i E_i\right) = \left(\sum_{\alpha_i \leq 0} \alpha_i E_i\right) \cdot \left(\sum_{\alpha_i > 0} \alpha_i E_i\right) + \left(\sum_{\alpha_i > 0} \alpha_i E_i\right)^2 < 0$$

Pero por otro lado, la suposición de que E es relativamente nef sobre Y , implica que

$$0 \leq \left(\sum \alpha_i E_i\right) \cdot \left(\sum_{\alpha_i > 0} \alpha_i E_i\right)$$

Lo cual contradice la desigualdad anterior. \square

REFERENCES

[KM] J. Kollár and S. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 134, Cambridge University Press, Cambridge, 1998. With the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti; Translated from the 1998 Japanese original. MR1658959
 [H] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, No. 52, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. MR0463157
 [M] K. Matsuki, *Introduction to the Mori program*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2002. MR1875410