IV. Programa de Sarkisov en dimensión 2

Ya tenemos todos los ingredientes para probar el resultado principal:

Teorema (Programa de Sarkisov en dim 2): Sean X, X' superficies proy. suaves y sea

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "f", "\text{bir}"'] \arrow[d, "\varphi"'] & X' \arrow[d, "\varphi'"] \\ Z & Z' \end{tikzcd}$$

aplicación birracional entre dos MFS. Entonces, f se descompone en finitos links de Sarkisov:

(I) $\begin{tikzcd} \mathbb{P}^2 \arrow[r, dashed, "\varepsilon^{-1}"] \arrow[d] & \mathbb{F}_1 \arrow[d] \\ \{pt\} & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$ (II) $\begin{tikzcd} \mathbb{P}(\mathcal{E}) \arrow[r, dashed, "\text{elem}", "\text{transf.}"'] \arrow[d] & \mathbb{P}(\mathcal{E}') \arrow[d] \\ B \arrow[r, "Id_B"] & B \end{tikzcd}$ (III) $\begin{tikzcd} \mathbb{F}_1 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d] & \mathbb{P}^2 \arrow[d] \\ \mathbb{P}^1 & \{pt\} \end{tikzcd}$ (IV) $\begin{tikzcd} \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1 \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "pr_1"'] & \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1 \arrow[d, "pr_2"] \\ \mathbb{P}^1 & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$

Recordemos la definición de $\deg_{Sar}(f) = (\mu, \lambda, \ell)$:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "\sigma'"] & \\ X \arrow[rr, dashed, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & & X' \arrow[d, "\varphi'"] \\ Z & & Z' \end{tikzcd}$$

- Fijamos $\mu' \in \mathbb{Q}^{>0}$ y $A' \in Pic(Z')$ amplio tq $H' := -\mu' K_{X'} + (\varphi')^* A'$ muy amplio.
- Si $D' \in |H'|$ general, $D = \sigma_* \sigma'^* D'$ y $f^{-1}|H'| = \sigma_*\sigma'^*|H'|$.
- $\mu = D\cdot\Gamma / (-K_X\cdot\Gamma) \in \frac{1}{6}\mathbb{N}^{\geq 1}$ para toda $\Gamma \subseteq X$ contraída por φ.

- Si $Exc(\sigma) = E_1 \cup \ldots \cup E_m$ y $K_Y = \sigma^* K_X + \sum_{k=1}^m a_k E_k$ y $D_Y := \sigma'^* D' = \sigma^* D - \sum_{k=1}^m b_k E_k$ entonces $\lambda := \max_k \{b_k/a_k\}$, y si $Bs(f^{-1}|H'|) \neq \emptyset$ entonces $\lambda = \max\{mult_p(D),\ p \in Bs(f^{-1}|H'|)\}$.
- Si $\lambda > 0$, escribimos $K_Y + \frac{1}{\lambda} D_Y = \sigma^*(K_X + \frac{1}{\lambda} D) + \sum_{k=1}^m \delta_k E_k$ con $\delta_k = a_k - \frac{b_k}{\lambda} \geq 0$.

Entonces, $\ell := \#\{E_k$ tal que $\delta_k = 0$, ie, $\lambda = b_k/a_k\}$. Si $\lambda = 0$, $\ell = \star$ indefinido.

Dem del Teorema: Hay dos casos (y varios subcasos) a considerar:

$\boxed{\text{Caso 1}}$ Sup. que $\lambda \leq \mu$. En este caso, nos preguntamos si $K_X + \frac{1}{\mu} D$ es o no nef:

$\boxed{\text{Caso 1.1}}$ Sup. $\lambda \leq \mu$ y $K_X + \frac{1}{\mu} D$ nef: Entonces f isomorfismo de MFS (Noether-Fano-Iskovskikh)

$\boxed{\text{Caso 1.2}}$ Sup. $\lambda \leq \mu$ y $K_X + \frac{1}{\mu} D$ no es nef: Notar que $\varphi : X \to Z$ no es $\mathbb{P}^2 \to \{pt\}$ pues en tal caso $(\mu K_X + D)\cdot C = 0$ $\forall$ curva $C \subseteq X \simeq \mathbb{P}^2$ y luego $K_X + \frac{1}{\mu}D$ es nef ↯

Así, $X \simeq \mathbb{P}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\varphi} B$ y $NS(X) \simeq \mathbb{Z}^2$ generado por f (fibra de φ) y $\xi = [\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)]$.

Luego, como $(K_X + \frac{1}{\mu}D)\cdot f = 0$ y $K_X + \frac{1}{\mu}D$ no es nef, $\exists\ R = \mathbb{R}^{\geq 0}[C]$ rayo extremal tal que $(K_X + \frac{1}{\mu}D)\cdot C < 0$, ie, $0 \leq \frac{1}{\mu} D\cdot C < -K_X \cdot C$ y así $K_X\cdot C < 0$.

Sea $\psi : X \to T$ la contracción extremal del rayo extremal R. Hay dos casos:

$\boxed{\text{Caso 1.2.D}}$ Sup. ψ divisorial: $\psi(E) = \{pt\}$ con $E \subseteq X$ una (-1)-curva.

Como $\dim(T) = 2$, $\kappa(T) = -\infty$, $\rho_T = 2 - 1 = 1 \Rightarrow T \simeq \mathbb{P}^2$, $X \simeq \mathbb{F}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^1$ ⇝ Tipo III.

$\boxed{\text{Caso 1.2.F}}$ Sup. ψ fibración: En este caso X posee dos $\mathbb{P}^1$-fibraciones $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & B' \\ B & \end{tikzcd}$

Como B' está dominado por fibras de φ, $B' \simeq \mathbb{P}^1$. Igualmente, $B \simeq \mathbb{P}^1$.

Así, $X \cong \mathbb{F}_m$. $\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que $m = 0$, ie, $X \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ⇝ Tipo IV.

⚠ **Hecho**: En los casos 1.2.D y 1.2.F se tiene $\mu_1 := \mu(f_1) < \mu = \mu(f)$ con $\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "\text{link}"] \arrow[rr, dashed, bend left, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & X_1 \arrow[r, dashed, "f_1"] \arrow[d, "\varphi_1"] & X' \arrow[d, "\varphi'"] \\ Z & Z_1 & Z' \end{tikzcd}$

En efecto: Para el link de Tipo III $\begin{tikzcd} X = \mathbb{F}_1 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\varphi"'] & X_1 = \mathbb{P}^2 \arrow[d, "\varphi_1"] \\ \mathbb{P}^1 & \{pt\} \end{tikzcd}$ se calcula:

$f = \varepsilon^*(L) - E$ con $E = Exc(\varepsilon)$, $K_X = \varepsilon^*(-3L) + E$, $D = \varepsilon^*(aL) - bE$ con $a, b \geq 0$.

Luego, $K_X + \frac{1}{\mu}D = \varepsilon^*((-3 + \frac{a}{\mu})L) + (1 - \frac{b}{\mu})E$ y así $(K_X + \frac{1}{\mu}D)\cdot E = \frac{b}{\mu} - 1 < 0$ (def. de R).

Como $0 \overset{def}{=} (K_X + \frac{1}{\mu}D)\cdot f = (\varepsilon^*((-3+\frac{a}{\mu})L) + (1 - \frac{b}{\mu})E)\cdot(\varepsilon^* L - E) = -3 + \frac{a}{\mu} + \underbrace{1 - \frac{b}{\mu}}_{>0} > -3 + \frac{a}{\mu}$

Luego, $(K_{X_1} + \frac{1}{\mu}D_1)\cdot L = (-3 + \frac{a}{\mu})L^2 = -3 + \frac{a}{\mu} < 0 \Rightarrow \boxed{\mu_1 < \mu}$ por def ✓

Para el link de Tipo IV con
$$\begin{array}{ccc} F \subseteq X = \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1 & \xrightarrow{Id} & X_1 = \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1 \supseteq F_1 \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\ \mathbb{P}^1 & & \mathbb{P}^1 \end{array}$$
se calcula

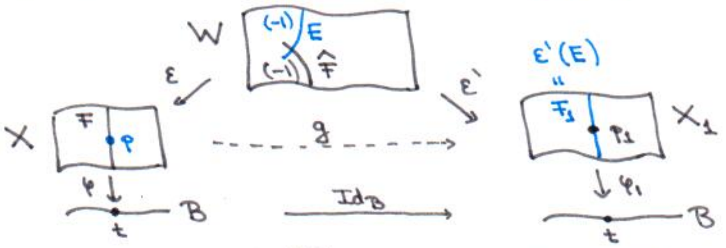
$(K_X + \frac{1}{\mu}D)\cdot F_1 < 0$ (def de R!) y así, como $X = X_1$, se tiene $\boxed{\mu_1 < \mu}$ por def ✓ ■

$\boxed{\text{Caso 2}}$ Sup. que $\lambda > \mu$: En este caso, nos preguntamos si $\rho_X = 1$ o si $\rho_X = 2$:

$\boxed{\text{Caso 2.1}}$ Sup. que $\lambda > \mu$ y que $\rho_X = 1$, i.e., $X \simeq \mathbb{P}^2$: sea $p \in X$ tal que $\lambda = \mathrm{mult}_p(D)$ y sea
$$\begin{array}{ccc} X = \mathbb{P}^2 & \overset{\varepsilon^{-1}}{\dashrightarrow} & \mathbb{F}_1 = X_1 \supseteq F_1 \\ \varphi \downarrow & & \varphi_1 \downarrow \\ \{pt\} & & \mathbb{P}^1 \end{array}$$
link de Tipo I. Veamos que $\mu_1 < \mu$:

Notar que si $D \sim aL$ con $a \geq 1$, entonces $D_1 = \varepsilon^*(aL) - \lambda E$. Además, $K_{X_1} = \varepsilon^*(-3L) + E$ y $F_1 = \varepsilon^*(L) - E$. Luego, $K_{X_1} + \frac{1}{\mu}D_1 = \left(-3 + \frac{a}{\mu}\right)\varepsilon^*(L) + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)E$ y como $\lambda > \mu$ se tiene
$$(K_{X_1} + \tfrac{1}{\mu}D_1)\cdot F_1 = \underbrace{-3 + \frac{a}{\mu}}_{=0 \text{ (def de } \mu)} + \underbrace{1 - \frac{\lambda}{\mu}}_{<0 \text{ (pues } \lambda>\mu)} < 0$$
y así $\boxed{\mu_1 < \mu}$ en este caso ✓

$\boxed{\text{Caso 2.2}}$ Sup que $\lambda > \mu$ y que $\rho_X = 2$, i.e., $X \simeq \mathbb{P}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\varphi} B$: sea $p \in X$ tq $\lambda = \mathrm{mult}_p(D)$ y consideremos la transf. elemental (i.e., link de Tipo II) en $p \in X$



$G := \varepsilon^*(F) = (\varepsilon')^*(F_1)$

$K_W = \varepsilon^*(K_X) + E$

$D_W = \varepsilon^*(D) - \lambda E$

$\Rightarrow K_W + \frac{1}{\mu}D_W = \varepsilon^*(K_X + \frac{1}{\mu}D) + (1 - \frac{\lambda}{\mu})E$

Notamos que $(K_W + \frac{1}{\mu}D_W)\cdot G \overset{\text{proy}}{=} \varepsilon^*(K_X + \frac{1}{\mu}D)\cdot\varepsilon^*(F) = (K_X + \frac{1}{\mu}D)\cdot F \overset{\text{def}}{=} 0$. Del mismo modo, $0 = (K_W + \frac{1}{\mu}D_W)\cdot G \overset{\text{proy}}{=} (\varepsilon')^*(K_{X_1} + \frac{1}{\mu}D_1)\cdot(\varepsilon')^*(F_1) = (K_{X_1} + \frac{1}{\mu}D_1)\cdot F_1$, i.e., $\boxed{\mu = \mu_1}$.

⚠ **Hecho**: En el Caso 2.2 se tiene $\lambda_1 \leq \lambda$, y si $\lambda_1 = \lambda$ entonces $l_1 < l$.

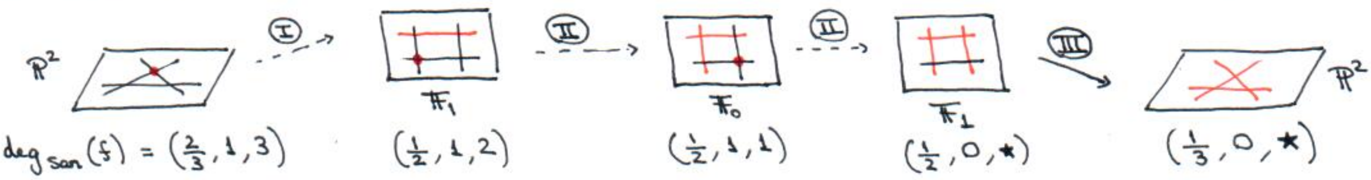
En efecto: La observación clave (Bruno-Matsuki, 1997) es notar que por definición
$$\frac{1}{\lambda} = \max\{r \in \mathbb{Q}^{\geq 0},\ a_K - r b_K \geq 0\ \forall K\} = \min_K\left\{\frac{a_K}{b_K}\right\}$$
$$\overset{\text{def}}{=} \max\{r \in \mathbb{Q}^{\geq 0},\ \underline{(X, rD) \text{ canonical}},\ \text{i.e., } K_Y + rD_Y = \sigma^*(K_X + rD) + \textstyle\sum \delta_K E_K \text{ con } \delta_K \geq 0\ \forall K\}$$
Así, como $(X_1, \frac{1}{\lambda}D_1)$ se obtiene mediante el $(K_X + \frac{1}{\lambda}D)$-MMP $\overset{\text{Lema}}{\underset{\text{Negatividad}}{\Longrightarrow}}$ $(X_1, \frac{1}{\lambda}D_1)$ también es canonical (!) y luego $\frac{1}{\lambda_1} \overset{\text{def}}{\geq} \frac{1}{\lambda}$, i.e., $\boxed{\lambda_1 \leq \lambda}$ (cf. Matsuki p. 105 para otro argumento).

si $\lambda_1 = \lambda$: Escribimos, $K_W + \frac{1}{\lambda}D_W \overset{\text{¡E crepante!}}{\underset{\text{def}}{=}} \varepsilon^*(K_X + \frac{1}{\lambda}D)$ y luego $(K_W + \frac{1}{\lambda}D_W)\cdot\hat{F} \underset{\text{proy}}{=} (K_X + \frac{1}{\lambda}D)\cdot F < 0$ pues $\lambda > \mu$. Así, $K_W + \frac{1}{\lambda_1}D_W \overset{\lambda_1=\lambda}{=} (\varepsilon')^*(K_{X_1} + \frac{1}{\lambda_1}D_1) + \delta\hat{F}$ con $\delta \in \mathbb{Q}^{>0}$, i.e., $\hat{F}$ no es crepante para $(X_1, \frac{1}{\lambda_1}D_1)$ y así $l_1 \leq l - 1 < l$ ■

En conclusión $\deg_{\mathrm{Sar}}(f) = (\mu, \lambda, l) \underset{\text{lex}}{>} \deg_{\mathrm{Sar}}(f_1) > \dots$ en $\frac{1}{6}\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ■

<u>Obs finales</u>: ① Una consecuencia del Programa de Sarkisov es que si $f: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, $[x,y,z] \mapsto [\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}]$ entonces $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2) = \langle PGL_3(\mathbb{C}), f\rangle$. Una prueba detallada se encuentra en la §2.5 del libro "Rational and Nearly Rational Varieties" por Kollár, Smith y Corti.

② Probar que $f: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, $[x,y,z] \mapsto [\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}]$ se factoriza como sigue:



$\deg_{\mathrm{Sar}}(f) = (\frac{2}{3}, 1, 3)$ $(\frac{1}{2}, 1, 2)$ $(\frac{1}{2}, 1, 1)$ $(\frac{1}{2}, 0, \star)$ $(\frac{1}{3}, 0, \star)$