«Acotamiento efectivo de T-singularidades en superficies racionales»

$K_W > 0$

sga

20/Junio/2023

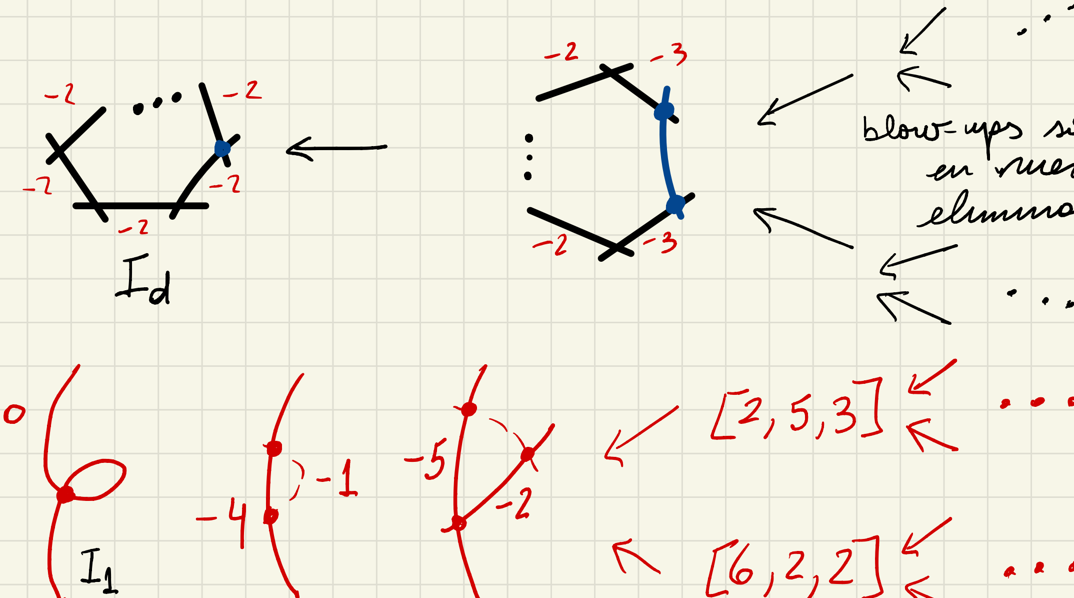
Martes 15:00

sala 2

1. Una T-singularidad es una singularidad cociente 2-dim la cual admite una suavización $\mathbb{Q}$-Gorenstein (ie K^2 constante)

<u>Teorema</u> : T-sing $\equiv$ ADE $\cup$ $\frac{1}{dn^2}(1, dna-1)$ $d \geq 1$ $\operatorname{mcd}(n,a)=1$.

Hoy : T-sing significa $\frac{1}{dn^2}(1, dna-1)$ y su resolución minimal se obtiene :



blow-ups sobre el nodo elegido en nuevos nodos. Luego eliminar la última (-1)-curva

$r :=$ largo de la fracción

sing. de Wahl

2. Sea W = superficie proyectiva con solo T-singularidades. Fijar $K_W^2 \in \mathbb{Z}$. Entonces:

(1) Si K_W no es neg $\Rightarrow$ lista de T-sing para W es ∞ en general.

e.g. $[7,2,2,2]-1-[5,2,6,2,2,2]$ $\delta=2$

(2) Si K_W es neg y $K_W^2 \geq 1$ $\Rightarrow$ lista de T-sing. para W es FINITA!

Flip

e.g. $[5,2]-1-[7,2,2,2]$

$$\boxed{\text{Pregunta: ¿Será que podemos escribir una lista óptima para los potenciales T-sing?}}$$

Diagrama

$C = \mathrm{Exc}(\phi)$

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "\text{blow-ups}"'] \arrow[ddl, bend left, "\pi"] \arrow[dr, "\phi"', "\text{resol. minimal}"] & \\
Z \arrow[d, "\text{blow-ups}"'] & & W \\
S & &
\end{tikzcd}$$

W con ℓ T-sing y K_W amplio

S = superficies sin (-1)-curvas

Teo: $\pi(C)$ es una conf. no vacía de curvas racionales

Teorema (Rana U 2019) Si $\ell=1$ y K_S neg, entonces

$$\left.\begin{array}{ll} 1.\ \kappa(S)=0, & r-d\leq 4K_W^2 \\ 2.\ \kappa(S)=1, & r-d\leq 4K_W^2-2 \\ 3.\ \kappa(S)=2, & r-d\leq 4(K_W^2-K_S^2)-4 \text{ si } K_W^2-K_S^2>1 \\ & \text{sino } r-d\leq 1. \end{array}\right\} \text{ optimales!}$$

(Si $\ell\geq 2$ arbitrario, entonces tenemos algo similar Figueroa, Rana, U 2023.)

3. Si K_S <u>no</u> es neg $\Rightarrow$ S es racional (ie $\mathbb{F}_n$ o $\mathbb{P}^2$).

Resulta que, en general, las cotas optimas tienen la forma

$$\sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i(r_i-d_i)\leq f(K_W^2,\ell)-\beta\cdot K_S\cdot\pi(C)$$

para ciertos $\alpha_i,\beta>0$ y cierta $f(K_W^2,\ell)$.

Luego, si K_S neg $\Rightarrow$ hay cota y resulta ser óptima.

Si $S = \mathbb{F}_n$ o $\mathbb{P}^2$ $\Rightarrow$ $K_S \cdot \pi(C)$ es negativo y necesitamos acotarlo con K_W^2 y ℓ.

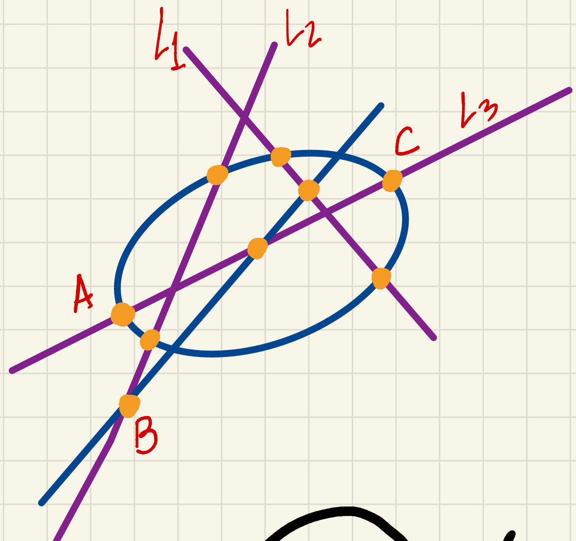
Recordar: $\underbrace{K_{\mathbb{P}^2} \sim -3L}_{\text{ie acotar grado de } \pi(C)}$, $K_{\mathbb{F}_n} \sim -2\Gamma - (2+n)F$.

(II) Recordar el set-up y directo a lo racional:

- **Teorema**: Si $\ell = 1$ y K_S no neg, entonces

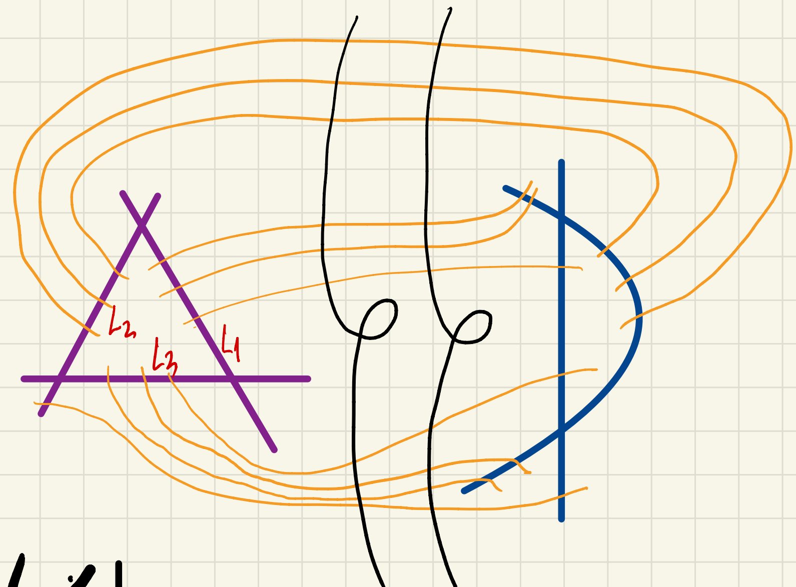
$$r - d \le \begin{cases} 2(K_W^2 - K_S^2) - K_S \cdot \pi(C) & \text{no long diag} \\ 2(K_W^2 - K_S^2) + 1 - K_S \cdot \pi(C) & \text{" \quad " \quad I} \\ 4(K_W^2 - K_S^2) - 2K_S \cdot \pi(C) & \text{" \quad " \quad II} \end{cases}$$

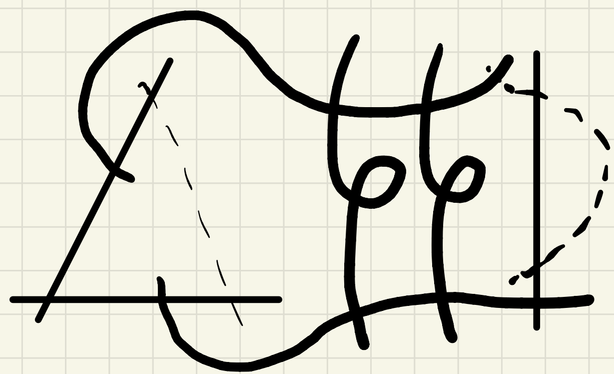
4. Construcción : 4 rectas genéricas y 1 cónica genérica

- $S =$ 

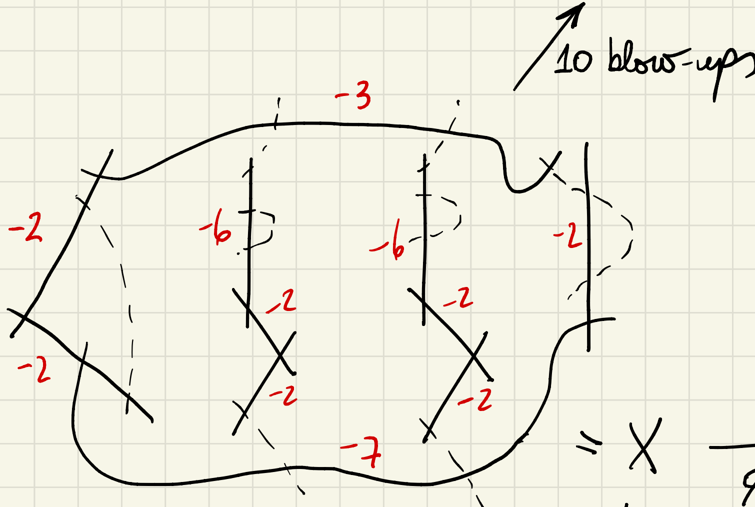
$\parallel$

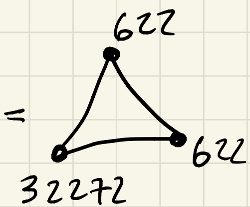
$\mathbb{P}^2$





$= Z$



$= X \xrightarrow{\phi} W =$ 

Luego $K_W^2 = -10 + 3+3+5 = 1$

y K_W amplio si $I_3 + I_2 + 7I_1$ genérico

$X \longrightarrow Z$

2 7 2 2 3 1 6 2 2 $\quad \delta = 11$

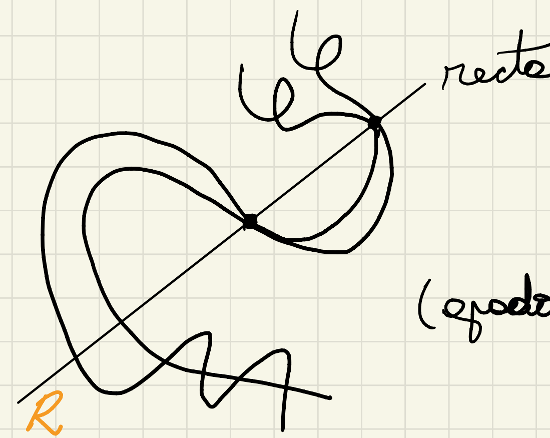
$K>0$

$[6,2,2] - [4,2,2,8,2,2,2,5,2,2] - \cdots \infty$

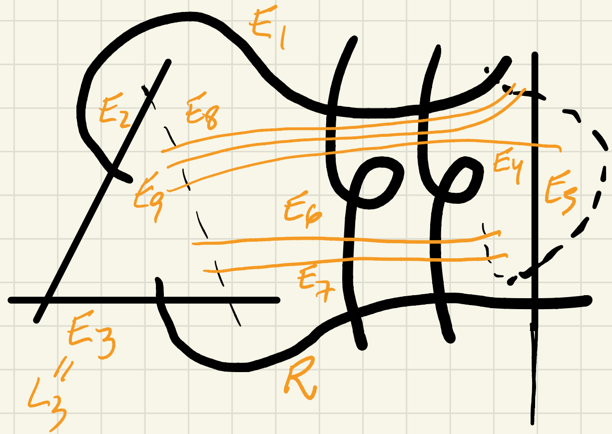
$K<0$

Z

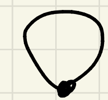
Cubica
+ cubica
+ 3 rectas
(grado 9)



(grado 7)

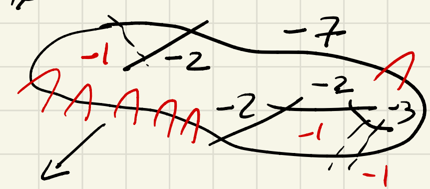


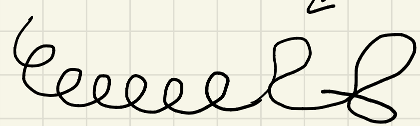
$= Z$ y $\overset{E_8}{\overline{AB}}$ y $\overset{E_9}{\overline{BC}}$. (ver arriba)

De hecho la W <u>no</u> tiene obstrucciones y podemos suavizar ambos [6,2,2] y obtener $W' =$ 

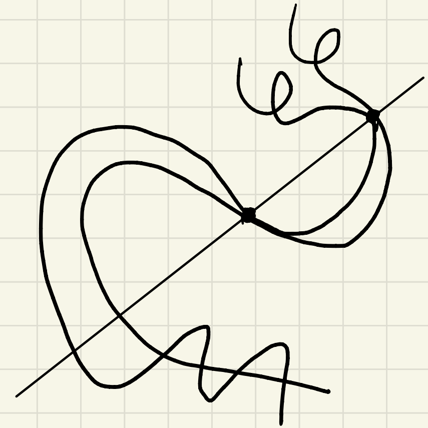
∴ (usar flips) $X' \xrightarrow{\phi} W'$

$X' \to S = \mathbb{P}^2$

$X' \supset$ 

 séptica C_t

y tenemos $C_t \rightsquigarrow$



La desigualdad arriba dice:

$$5-1=4 \leq 4(1-9)+2\cdot 3\cdot d$$

$$6 \leq d$$

¿Cuáles son los grados mínimos de $\pi(C)$?

5. __Lema__: Sea $Z \to \mathbb{P}^1$ fibración elíptica minimal con ∞ (-1)-curvas
Sea D una sección
$\Rightarrow \exists\ \infty$ (-1)-curvas Γ_i con $\lim\limits_{i\to\infty} \Gamma_i \cdot D = \infty$.

Más aun existe $\sigma_i : Z \to \mathbb{P}^2$ tal que grado$(\sigma_i(D)) \xrightarrow[i\to\infty]{} \infty$.

Dem: Considerar $B := F + D$ donde F es fibra de $Z \to \mathbb{P}^1$

- $B^2 = 1$ y B es neg $\Rightarrow$ B es big y neg.
- B big $\Longleftrightarrow$ $\exists A$ amplio, N efectivo tq $B \equiv A + \frac{N}{k}$ con $k > 0$. [ver KM Prop 2.61]
- Como A es amplio, tenemos para $C > 0$

$$\{ x \in \overline{NE(Z)} : x \cdot A \leq C \} \text{ es compacto}$$ [ver KM Cor 1.19(2)]

- y así $\Gamma_i \cdot A \xrightarrow[i \to \infty]{} \infty$. Como $\Gamma_i \cdot A = \Gamma_i \cdot (F + D) - \frac{N \cdot \Gamma_i}{k}$ (pueden haber finitos $\Gamma_i \subset N$)

$\Rightarrow$ $\Gamma_i \cdot D \xrightarrow[i \to \infty]{} \infty$ (reordenando). $\qquad \underset{1 + \Gamma_i \cdot D}{\text{\rotatebox{90}{$\leq$}}}$

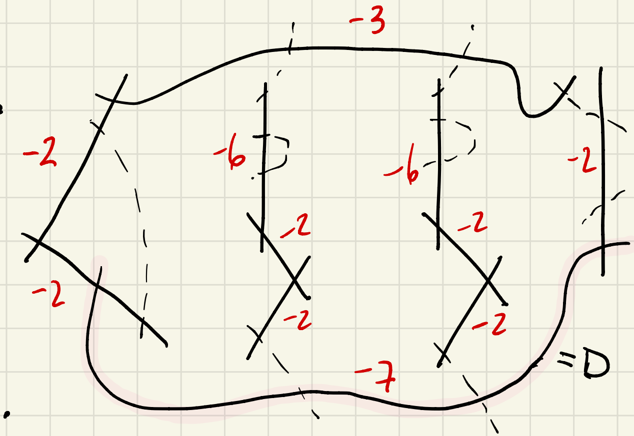
- Contraer Γ_i y luego

Tenemos $Z \longrightarrow \mathbb{F}_\ell$ $\forall \ell$. Pero $K_Z \sim -F$ y así para $\Gamma = \mathbb{P}^1$

tenemos $\Gamma^2 = F \cdot \Gamma - 2 \geq -2$ $\Rightarrow$ $\ell = 2, 1, 0$.

luego $\underset{\text{arbitrario}}{Z} \longrightarrow Bl \begin{cases} \nearrow \mathbb{F}_0 \\ \to \mathbb{F}_1 \\ \searrow \mathbb{F}_2 \end{cases}$ y así $Z \xrightarrow{\sigma_i} \mathbb{P}^2$ con grado$(\sigma_i(D)) \xrightarrow[i \to \infty]{} \infty$

6. En la construcción $\Rightarrow$



tenemos un tal D (hay 2), y partimos con $I_3+I_2+7I_1$

$\Rightarrow MW(Z\to\mathbb{P}^1)$ tiene rango 4.

$\Rightarrow \infty$ secciones Γ_i.

Discusión: A partir de aquí, no es claro como encontrar el "grado mínimo" de la imagen de C

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[dll, "\text{mejor?}"'] \arrow[d] \arrow[rr] & & W \\
\mathbb{F}_{\ell\,\max} & & Z \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & \mathbb{P}^2 \arrow[rr, dashed, "\text{Sarkisov}", "?"'] & & \mathbb{P}^2 &
\end{tikzcd}$$

Z (Elíptica diagonos)

$\mathbb{P}^2$ con grado mínimo

K_W amplio

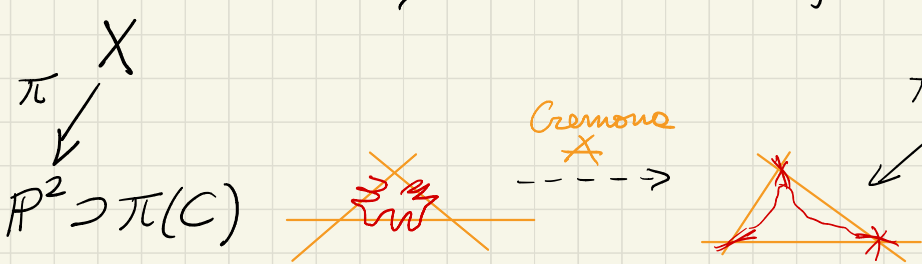
K_W^2 fijo

Algunas observaciones concentradas en $\mathbb{P}^2$.

<u>Teorema</u>: (Noether-Castelnuovo) Todo $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ biracional es composición de finitos isomorfismos $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ y transformación de Cremona $[X,Y,Z] \mapsto [XY, XZ, YZ]$.

Demostración se puede hacer a través de Sarkisov (ver libro "The classification of complex algebraic surfaces" Ciro Ciliberto, página 74.)

No obstante: <u>No</u> podemos llegar y hacer transformaciones arbitrarias de Cremonas, i.e. en el Δ que se les antoje.



<u>Resp</u>: NO.
Se crearon (-1)-curvas malas.

Por otro lado, clásicamente la gente se interesó por sistemas lineales cremona minimales. Existe el teorema siguiente.

<u>Teorema</u> (Jung 1988) Dado sistema lineal

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{grado}}}{d}; \underbrace{m_1, \dots, m_r}_{\substack{\text{cuenta mult o cercanos}\\ \text{en puntos bases}}})$$

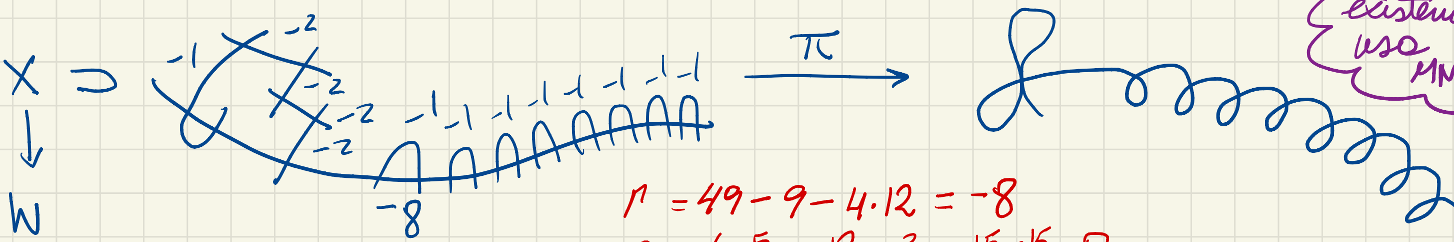
sin componentes fijos múltiples y digamos $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_r$.
Entonces $d \geq m_1 + m_2 + m_3 \Rightarrow \mathcal{L}$ es cremona minimal.

Para no crear (-1)-curvas malas debemos hacer cremonas con centros singulares. Abajo va un ejemplo:

(1) Minimal
(2) con varias cremonas que hacen crecer grado pero son buenos.

Ejemplo: resulta que la siguiente séptica nos da $K^2=1$ Godeaux $\pi_1=1$.

existencia uso MMP



$r = 49 - 9 - 4 \cdot 12 = -8$

$g = \frac{6 \cdot 5}{2} - 12 - 3 = 15 - 15 = 0$

Esta séptica pertenece a $\mathcal{L} = \mathcal{L}(7\,;\,3, \underbrace{2, \dots, 2}_{12 \text{ dos}})$.

Según Jung, la $\mathcal{L}$ es minimal.

no long diags

Nuestra desigualdad dice $6 - 1 \le 2(1-9) - K_{\mathbb{P}^2} \cdot \pi(C)$

$\Rightarrow \quad 3d \geq 5 + 16 = 21 \quad \Rightarrow \quad d \geq 7$ lo cual es otro chequeo!

Abajo va una tabla que cambia $\mathcal{L}$ por Cremonas con centros en singularidades, partiendo con los 8 puntos dobles simples, bajo $d \geq m_i + m_j + m_k$?

Семена	d	2	3	4	5	6	7	8
3 2	7	8	0	0	0	0	0	0
1 3 2 2	8	5	3	0	0	0	0	0
2 3 1 2	9	3	4	1	0	0	0	0
1 4 1 3 1 2	10	2	3	3	1	0	0	0
1 5 1 3 1 2	11	1	3	3	1	0	0	0
2 3 1 4	12	0	3	4	0	1	0	0
1 5 2 4	14	0	1	3	2	2	0	0
1 4 2 5	15	0	1	1	3	3	0	0
1 3 2 6	16	0	1	0	2	5	0	0
2 6 1 4	17	0	0	1	2	3	2	0
2 5 1 6	18	0	0	0	3	1	4	0
2 7 1 5	20	0	0	0	1	0	6	1
2 7 1 6	21	0	0	0	0	1	4	3
3 7	22	0	0	0	0	0	3	5
	23	0	0	0	0	0	0	8