Residualidad Finita y Complejos Cúbicos Especiales

I INTRO Γ : grupo finitamente generado (f.g.)

Def: • $S \subset \Gamma$ **separable** si $\forall a \in \Gamma \setminus S$ $\exists$

$\Gamma \xrightarrow{\varphi} Q$ cociente finite tq $\varphi(a) \notin \varphi(S)$

• Γ **residualmente finito** (RF) si $\{1\} < \Gamma$ separable

Obs: • $H < \Gamma$ separable ssi $H = \bigcap_{\substack{H < \hat{H} \\ |\Gamma : \hat{H}| < \infty}} \hat{H}$

$\therefore$ Γ RF ssi $\{1\} = \bigcap_{|\Gamma : \hat{H}| < \infty} \hat{H}$

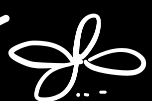
• $\{ S \subset \Gamma \mid S \text{ separable} \}$ topología en Γ: **topología profinita**

Γ RF ssi Γ Hausdorff

Ejemplos

• Γ finito o $\simeq \mathbb{Z}$ es RF $\quad (\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$

• RF $\times$ RF, RF $*$ RF, subgrupo de RF son RF

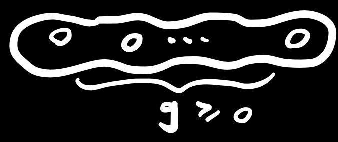
• $F_n = \pi_1($  $) = \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}$ RF, $F_2 \times F_2$ RF

• (Hall '49) Todo subgrupo f.g. de F_n es separable

• $GL(d, \mathbb{Z})$ RF: $\left(GL(d, \mathbb{Z}) \longrightarrow GL(d, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \right)$

Teorema (Malcev): $\Gamma < GL(d, K)$ char$(K) = 0$ + F f.g.

$\Longrightarrow \Gamma$ RF

$\therefore$ $\Sigma_g =$ 

$\Rightarrow$ $\pi_1(\Sigma_g)$ RF

$\pi_1(\Sigma_g) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid [a_1,b_1]\cdots[a_g,b_g] \rangle$

- (Hempel-Perelman): $\Gamma = \pi_1(M^3)$, M^3 3-variedad $\underbrace{\text{cerrada}}_{\text{compacta sin borde}}$
  $\Rightarrow$ Γ RF
- Γ simple infinito $\Rightarrow$ Γ No RF
- $BS(2,3) = \langle a, t \mid a^2 = t a^3 t^{-1} \rangle$ No RF

I Motivación

1) Algoritmos

$H < \Gamma$ f.g. es separable $\Rightarrow$ $\exists$ algoritmo que determina si $a \in \Gamma$ pertenece o no a H

Ejemplo: $\exists$ subgrupos f.g. de $F_2 \times F_2$ que no son separables

2) Criterio de Scott '78

$\Gamma = \pi_1(X)$, X CW complejo finito,

Criterio (Scott): $H < \Gamma$ separable ssi

$\forall\, K \subset X_H$ compacto $\exists$ $X_H \to \hat{X} \xrightarrow{\text{grado finito}} X$

tq $K \hookrightarrow \hat{X}$ inyectiva

$$\begin{tikzcd}
 & X_H \arrow[d, dashed] \\
K \arrow[ur] \arrow[r, hook, dashed] \arrow[dr, hook] & \hat{X} \arrow[d, dashed, "\text{finito}"] \\
 & X
\end{tikzcd}$$

Coro: Todo subgrupo f.g. de $\pi_1(\Sigma_g)$ es separable

3) Completación profinita

$$\hat{\Gamma} := \varprojlim_{\substack{\Gamma \twoheadrightarrow Q \\ \text{cociente} \\ \text{finito}}} Q \qquad \text{Ej: } \hat{\mathbb{Z}} = \prod_{p \text{ primo}} \mathbb{Z}_p$$

· Γ RF $\longleftrightarrow$ $\Gamma \hookrightarrow \hat{\Gamma}$

étale fundamental group

· X esquema de tipo finito sobre $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $\widehat{\pi_1(X)} = \pi_1^{et}(X)$

4) 3-Variedades

Def: M^3 variedad cerrada es Haken si $\exists\, \Sigma_g \hookrightarrow M$ subsuperficie π_1-inyectiva con $g \geq 1$.

Teorema (Agol '12): M^3 cerrada hiperbólica ($M \simeq \Gamma \backslash \mathbb{H}^3$, $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H}^3$ acción isométrica (libre, cocompacta, prop. disc.))

$\Rightarrow \exists\, M' \to M$ cubrimiento finito tq M' Haken.

└ Kahn-Markovic: $\exists$ immersión π_1-inyectiva $\Sigma_g \looparrowright M$

↳ Agol: $\pi_1(\Sigma_g) < \pi_1(M)$ separable!

↳ Criterio de Scott: $\Sigma_g \looparrowright M$ se levanta a embedding

$$\begin{tikzcd} & M' \arrow[d, dashed] \\ \Sigma_g \arrow[ur] \arrow[r, looparrowright] & M \end{tikzcd} \quad \} \text{ finito}$$

Corolario: Todo subgrupo f.g. de $\pi_1(M^3)$ es separable

Corolario: $\exists\, M'' \to M$ cubrimiento finito tq M'' es fibrado sobre el círculo

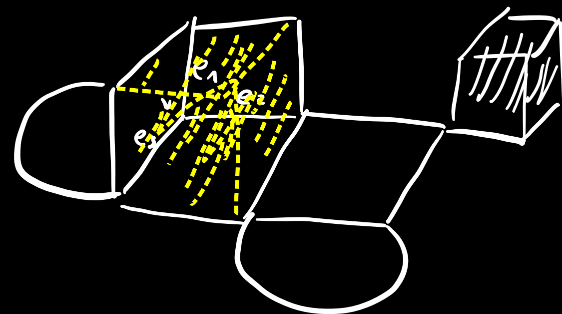
$$\begin{tikzcd} \Sigma_g \arrow[r] & M'' \arrow[d] \\ & S^1 \end{tikzcd} \qquad M'' \simeq \text{mapping torus de } \Sigma_g \circlearrowleft f$$

III Complejos cúbicos NPC

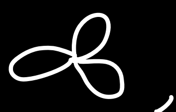
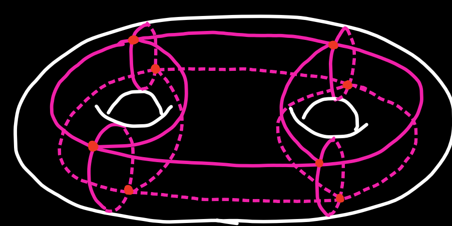
Def: X es

- **Complejo cúbico**: si unión de cubos euclideos de lado 1, se pega isométricamente por subcaras
- **de curvatura no-positiva (NPC)**: si "no esferas"
  $e_1, \ldots, e_n$ aristas en vértice v
  $+ \; e_i, e_j$ generan cuadrado para $i \neq j$

  $\Rightarrow e_1, \ldots, e_n$ generan un n-cubo



- **CAT(0)**: NPC + contractible (= NPC + simplemente conexo)

Ejemplos: • Grafos , $\Sigma_2 \simeq$ 

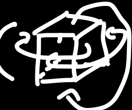
• $NPC \times NPC = NPC$, • $NPC \vee NPC = NPC$

Def: Γ (sin torsión) **cubulable** si $\Gamma \simeq \pi_1(X)$, X complejo cúbico NPC compacto

Ejemplo: F_n, $F_m \times F_n$, $\pi_1(\Sigma_g)$

Ejemplo: Grupos de Artin de Ángulo Recto (RAAG)

G grafo simplicial finito $\rightarrow A_G = \langle$vértices de $G \mid [v,w]=1$ ssi $\{v,w\}$ arista$\rangle$ $= \pi_1(X_G)$

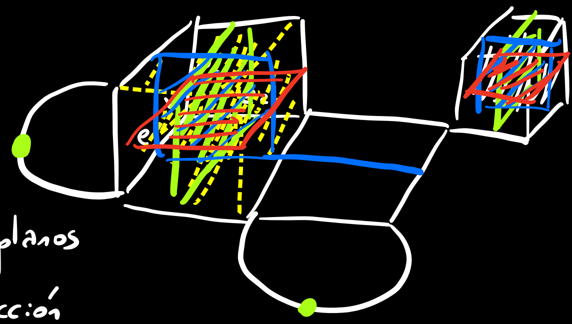
$A_{\because .} = F_4 = \pi_1($$)$, $A_{\triangle} = \mathbb{Z}^3 = \pi_1($$)$

Teorema (Kahn-Markovic): $\pi_1(M^3 =$ cerrada hiperbólica$)$ cubulable

Pregunta: $\exists M' \to M$ finito tq $\pi_1(M^3) \simeq \pi_1(X)$, con X 3-dimensional?

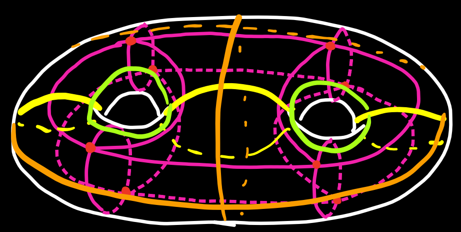
Teorema (Burger-Mozes, Wise): $\exists \, \Gamma$ cubulable, simple, infinito.

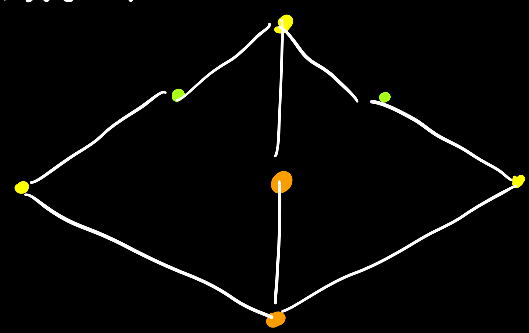
IV Complejos cúbicos especiales



- X Complejo cúbico NPC
  $\rightsquigarrow$ hiperplanos

- Grafo de intersección: - vertices = hiperplanos
  G_X - aristas = intersección transversal





- **Def:** X es **especial** si mapa $X \to X_G$ es **isometría local** (i.e. $\pi_1(X) \hookrightarrow A_{G_X}$)

Propiedad: (Retracción / Completación canónica) $Y \looparrowright X$ isometría local de c.c. NPC especiales ($\pi_1(Y) \hookrightarrow \pi_1(X)$)

$\Rightarrow \exists\ X' \to X$ cubrimiento finito, $Y \hookrightarrow X'$ levantamiento y $X' \xrightarrow{r} Y$ retracción.

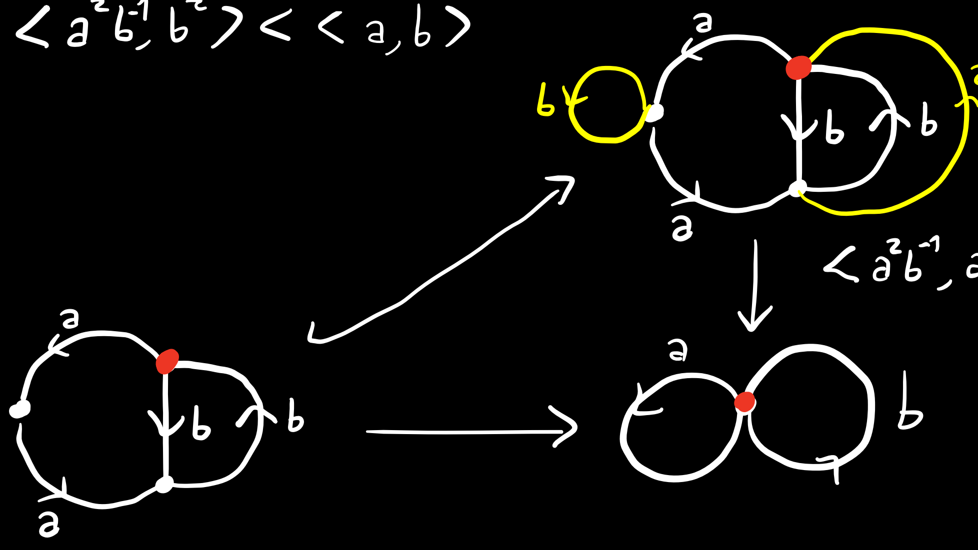
$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[d] \\ Y \arrow[ur, hook] \arrow[r, looparrow] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X' \arrow[d] \arrow[dr] & \\ Y \arrow[r, looparrow] & X \end{tikzcd}$$

Lema: $K < \Gamma$, Γ RF + $\exists\ \rho: \Gamma \to K$ retracción ($\rho|_K = id_K$)
$\Rightarrow K < \Gamma$ separable.

Pf $r: \Gamma \to \Gamma$ $\quad r(g) = \rho(g)g^{-1}$ $\quad \hookrightarrow r$ continua en topología profinita
$\hookrightarrow r^{-1}(1) = K$ cerrado en Γ $\square$

$\therefore$ $\pi_1(Y)$ separable en $\pi_1(X)$ $\quad$ subgrupos "convexos" son separables

Ejemplo: $\langle a^2b^{-1}, b^2 \rangle < \langle a, b \rangle$



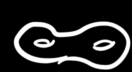
$\langle a^2b^{-1}, abab^{-1}, b^2, ba \rangle$

$$\Rightarrow \quad \langle a^2b^{-1}, b^2 \rangle < \langle a^2b^{-1}, abab^{-1}, b^2, ba \rangle \underbrace{<}_{\text{índice } 3} \langle a, b \rangle$$

Teorema (Agol '12): $\Gamma = \pi_1(X)$ $\quad X$ complejo cúbico NPC compacto
Γ hiperbólico $\quad \Longrightarrow \quad \exists\, X' \to X$ finito, X' especial

Teorema (R., Groves-Manning '20): $\Gamma = \pi_1(X)$ X complejo cúbico NPC compacto
Γ relativamente hiperbólico (tórico) $\Longrightarrow \exists\, X' \to X$ finito, X' especial

Hiperbólico $\quad \longleftrightarrow \quad \pi_1$(M hiperbólica cerrada), grupos libres



Relativamente hiperbólico $\longleftrightarrow$ π_1 (M hiperbólica de volumen finito), producto libre