EQUIVALENCIAS DERIVADAS

NICOLÁS VILCHES

RESUMEN. El estudio de categorías derivadas en geometría algebraica es una historia apasionante. Sus orígenes se remontan a la tesis de Jean-Louis Verdier (bajo la supervisión de Alexander Grothendieck) alrededor de 1960, donde aparecieron como un objeto formal para construir functores derivados y enunciar teoremas de dualidad. Con el correr de los años, la comunidad matemática se dió cuenta que $D^b(X)$ contiene mucha información geométrica de la variedad en cuestión. En particular, espacios de moduli sobre variedades tienden a tener una fuerte relación entre sus categorías derivadas, una perspectiva originada en trabajos de Mukai sobre variedades abelianas.

De este modo, las categorías derivadas tienen una doble vida, como objetos puramente algebraicos, y como categorías con información geométrica. Estudiaremos esta dualidad discutiendo ejemplos de variedades cuyas categorías derivadas son equivalentes. El foco estará puesto en discutir cómo ideas algebraicas y geométricas motivan estos resultados.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

Para comenzar, fijemos una categoría abeliana $\mathscr{A}$. Hay tres ejemplos a tener en mente, que son importantes para la teoría.

- Dado un cuerpo k, tomar $\mathscr{A}$ la categoría de k-espacios vectoriales finitamente generados.
- Dado un anillo Noetheriano R, tomar $\mathscr{A}$ la categoría de módulos finitamente generados sobre R.
- Dado un esquema Noetheriano X, tomar $\mathscr{A} = \operatorname{Coh} X$ la categoría de haces coherentes sobre X.

La *categoría derivada de* $\mathscr{A}$, denotada $\mathrm{D}(\mathscr{A})$, es una categoría definida de la siguiente manera. Sus objetos son complejos

$$\cdots \to A^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} A^i \xrightarrow{d^i} A^{i+1} \to \dots, \qquad d^2 = 0.$$

(Recordar que en tal caso tenemos definida una *cohomología* $H^i(A^\bullet)$.) Los morfismos son un poco más complicados de definir. Un *morfismo* de $A^\bullet$ a $B^\bullet$ es una clase de equivalencia de diagramas

$$\begin{tikzcd} & C^\bullet \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A^\bullet & & B^\bullet, \end{tikzcd}$$

tales que f, s son morfismos de complejos, y s es un cuasi-isomorfismo (esto es, $H^i(s)\colon H^i(C^\bullet) \to H^i(A^\bullet)$ es un isomorfismo para todo i). Luego, tomamos f, s salvo homotopía, y este tipo de diagramas salvo equivalencia.

Esta definición es bastante extraña a primera vista. Una manera de entender la construcción surge del estudio de functores derivados. Recordemos que dado un esquema X, al definir $H^i(X, \mathscr{F})$ (por ejemplo, en el capítulo III de Hartshorne), se hace la siguiente construcción. Fijamos una resolución por inyectivos

$$0 \to \mathscr{F} \to I^0 \to I^1 \to \dots.$$

Luego, "borramos" $\mathscr{F}$, aplicamos $\Gamma(X, -)$, y tomamos cohomología de complejos. Pero esta construcción es laboriosa: a priori, una resolución por inyectivos no es única, ni siquiera salvo inyectivos. Pero resulta que sí es única salvo cuasi-isomorfismo, y ese isomorfismo es canónico salvo homotopía. De este modo, esta resolución está únicamente determinada en la categoría derivada.

Un problema técnico es que $\mathrm{D}(\mathscr{A})$ no es una categoría abeliana. En cambio, es una *categoría triangulada*: en vez de secuencias exactas, tenemos una colección de *triángulos*

$$A^\bullet \to B^\bullet \to C^\bullet \to *.$$

Esta colección satisface varias propiedades técnicas; por ahora, mencionamos que esto induce una secuencia larga

$$\cdots \to H^i(A^\bullet) \to H^i(B^\bullet) \to H^i(C^\bullet) \to H^{i+1}(A^\bullet) \to \cdots.$$

Dado un functor aditivo, exacto por derecha $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ entre categorías abelianas, uno quisiera extender F a un functor $RF\colon \mathrm{D}(\mathscr{A}) \to \mathrm{D}(\mathscr{B})$. El problema esencial es que F a priori no preserva cuasi-isomorfismos, por lo que una construcción más complicada debe aplicarse. La idea básica es definir

$$RF(A) := F(I_A),$$

para I_A una resolución por inyectivos de A. Del mismo modo, si F es exacto por izquierda, definimos $LG\colon \mathrm{D}(\mathscr{A}) \to \mathrm{D}(\mathscr{B})$ vía

$$LG(A) := G(P_A)$$

para una resolución por proyectivos de A.

Ejemplo 1. Sea $\mathscr{A}$ la categoría de $k[x]$-módulos, y sea $M = k[x]/k$ como $k[x]$-módulo. Consideremos el functor $- \otimes M\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}$. Su functor derivado se anota usualmente como $- \overset{L}{\otimes} M\colon \mathrm{D}(\mathscr{A}) \to \mathrm{D}(\mathscr{A})$.

Si queremos calcular $M \overset{L}{\otimes} M$, debemos seguir nuestra receta anterior. Primero, reemplazamos M por una resolución por proyectivos; por ejemplo,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & k[x] \arrow[r, "\cdot x"] & k[x] \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Luego, aplicamos $-\otimes M$ a la resolución. Obtenemos así

$$M \overset{L}{\otimes} M \colon 0 \to M \xrightarrow{0} M \to 0.$$

Al tomar cohomología, obtenemos

$$H^i(M \overset{L}{\otimes} M) = \begin{cases} M & i = 0, -1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(Como dato importante, las cohomologías así obtenidas se llaman *functores Tor*.)

Dada una variedad X, denotamos $\mathrm{D}^b(X) = \mathrm{D}^b(\operatorname{Coh} X)$ a la categoría derivada de haces coherentes en X. En la charla de hoy intentaremos resolver la siguiente pregunta: ¿cuándo dos variedades tienen “igual” categoría derivada? Más precisamente, entender ejemplos de variedades X e Y tales que $\mathrm{D}^b(X)$ y $\mathrm{D}^b(Y)$ sean equivalentes como categorías trianguladas.

Puede ser sorprendente que una pregunta así sea interesante. De hecho, el siguiente teorema de Gabriel nos dice que esto puede ser pedir mucho.

Teorema 2 (Gabriel, 1962)**.** *Si X es una variedad,* $\operatorname{Coh} X$ *“determina” a X.*

De hecho, veremos que esto no es así para la categoría derivada. No obstante, este es un fenómeno raro, como ilustra el siguiente teorema.

Teorema 3 (Bondal–Orlov, 2001)**.** *Si X es una variedad de Fano, o una variedad de tipo general, entonces* $\mathrm{D}^b(X)$ *“determina” a X.*

2. Flop estándar

En esta sección discutiremos un ejemplo de variedades cuyas categorías derivadas son equivalentes, debido a Bondal y Orlov. Para formularlo, comenzaremos discutiendo la construcción del *flop estándar*.

Sea X una variedad (suave, proyectiva) de dimensión $2n+1$. Supongamos que X contiene una subvariedad $P \subseteq X$ isomorfa a $\mathbb{P}^n$, y tal que $N_{X/P} \cong \mathscr{O}_P(-1)^{\oplus n+1}$. (De este modo, tenemos que $\omega_X|_P = \mathscr{O}_P$ es trivial.) Construiremos una variedad X^+ nueva de la siguiente manera.

En primer lugar, sea $p\colon Y \to X$ el blow-up de X sobre P. Notemos que el divisor excepcional $E \subseteq Y$ es isomorfo a

$$E = \mathbb{P}_P(\mathscr{O}(-1)^{\oplus n+1}) \cong P \times P^+,$$

donde P^+ es la variedad dual a P. De este modo, el morfismo p restringe a la proyección $E = P \times P^+ \to P$.

Ahora bien, hay otra manera de proyectar E: hacia la *otra* componente P^+. Es posible probar que esta proyección extiende a un morfismo $p^+\colon Y \to X^+$, de modo que p^+ es el blow-up de X^+ sobre $P^+ \subseteq X^+$. (Esto a priori existe solo como variedad compleja, gracias al teorema de Nakano–Fujiki. Para nuestra discusión, asumiremos que tal contracción existe como variedad algebraica.)

Obtenemos así el siguiente diagrama, donde las flechas verticales son inclusiones.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl] \arrow[d, hook] \arrow[dr] & \\ P \arrow[d, hook] & Y \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "p^+"] & P^+ \arrow[d, hook] \\ X \arrow[rr, dashed] & & X^+ \end{tikzcd}$$

El mapeo $X \dashrightarrow X^+$ así obtenido se conoce como el *flop estándar*. Es directo verificar que este mapeo es un isomorfismo fuera de P y P^+.

Teorema 4 (Bondal–Orlov, 1995)**.** *Se tiene que* $\mathrm{D}^b(X) \cong \mathrm{D}^b(X^+)$*. Más aún, una equivalencia viene dada por*

$$Rp^+_* \circ Lp^* \colon \mathrm{D}^b(X) \to \mathrm{D}^b(X^+).$$

La demostración es bastante interesante. La idea básica es comparar las categorías derivadas de X y X^+ con la categoría derivada de Y. La relación precisa viene dada por una *descomposición semi-ortogonal.*

Definición 5. Sea $\mathcal{T}$ una categoría triangulada cualquiera. Una *descomposición semi-ortogonal* de $\mathcal{T}$ es una colección

$$\mathcal{T} = \langle \mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_r \rangle$$

de sub-categorías triangulares, satisfaciendo las siguientes dos condiciones.

- Si $i < j$, entonces $\mathrm{Hom}(A_j, A_i) = 0$.
- La categoría $\mathcal{T}$ es la categoría triangulada más pequeña que contiene a $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_r$.

Ahora, notemos que tanto $p \colon Y \to X$ como $p^+ \colon Y \to X^+$ son blow-ups de subvariedades suaves. Un resultado general debido a Orlov permite entender comparar la relación de categorías derivadas bajo blow-up.

Teorema 6 (Orlov, 1992)**.** *Sea Z una variedad suave proyectiva, y sea $W \subseteq Z$ una subvariedad suave de codimensión c. Llamemos $\tilde{Z}$ al blow-up, y denotamos las inclusiones como se muestra en la figura.*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & \tilde{Z} \arrow[d, "q"] \\ W \arrow[r] & Z. \end{tikzcd}$$

Luego, tenemos las siguientes propiedades.

- *El functor $Lq^* \colon \mathrm{D}^b(Z) \to \mathrm{D}^b(\tilde{Z})$ es fully faithful. Llamemos $\mathrm{D}(Z)$ a su imagen.*
- *Para todo k, el functor*

$$Ri_*(L\pi^*(-) \overset{L}{\otimes} \mathscr{O}_\pi(k)) \colon \mathrm{D}^b(W) \to \mathrm{D}^b(\tilde{Z})$$

  es fully faithful. Llamemos $\mathrm{D}(W)_k$ a su imagen.
- *Tenemos la descomposición semi-ortogonal*

$$\mathrm{D}^b(\tilde{Z}) = \langle \mathrm{D}(W)_{-c+1}, \dots, \mathrm{D}(W)_{-1}, \mathrm{D}(Z) \rangle.$$

Demostrar este resultado no es difícil, pero requiere hacer bastantes cálculos. El libro de Huybrechts *Fourier–Mukai transforms in Algebraic Geometry* contiene una buena exposición de este resultado.

Con ello, en nuestra situación tenemos dos descomposiciones semi-ortogonales distintas: por un lado,

$$\mathrm{D}^b(Y) = \langle \mathrm{D}(P)_{-n}, \ldots, \mathrm{D}(P)_{-1}, \mathrm{D}(X)\rangle,$$

mientras que por el otro

$$\mathrm{D}^b(Y) = \langle \mathrm{D}(P^+)_{-n}, \ldots, \mathrm{D}(P^+)_{-1}, \mathrm{D}(X^+)\rangle.$$

El resto de la demostración es esencialmente un problema de "álgebra lineal".

Este enfoque es bastante flexible y utilizado. Para distintos tipos de situaciones, hemos demostrado descomposiciones semi-ortogonales asociadas a distintas construcciones geométricas (fibrados vectoriales, variedades de Brauer–Severi, blow-ups, cocientes GIT, etcétera). Por otro lado, demostrar equivalencia derivada entre variedades de esta forma no hace claro cómo entender la relación entre ambas variedades, en especial si el functor construido no es "suficientemente geométrico". Más adelante discutiremos un ejemplo en este espíritu.

3. Variedades abelianas

Para nuestro siguiente ejemplo, comenzaremos recordando la siguiente definición.

Definición 7. Una *variedad abeliana* A es una variedad proyectiva sobre k, dotada de estructura de grupo algebraico. Esto es, tenemos un morfismo multiplicación $m\colon A \times A \to A$, un morfismo inverso $\iota\colon A \to A$, y un morfismo identidad $e\colon \operatorname{Spec} k \to A$, satisfaciendo las operaciones usuales.

El ejemplo clásico viene dado por las *curvas elípticas*. De forma concreta, podemos pensar en E como (la clausura proyectiva de)

$$E = \{y^2 = x^3 + ax + b\}, \qquad 4a^3 + 27b^2 \neq 0,$$

con el neutro el punto al infinito. La multiplicación viene dada de manera geométrica, como en la siguiente figura.

Dada una variedad abeliana A, uno de los objetos clásicos de estudio es su *variedad dual*. Definimos

$$\hat{A} = \{L \in \operatorname{Pic}(A) : t_a^* L \cong L,\ \forall a \in A\},$$

donde $t_a\colon A \to A$ es el morfismo "traslación por a". (Esto resulta ser equivalente a la componente de la identidad en el esquema de Picard.)

Por ejemplo, para curvas elípticas uno demuestra que L es invariante si y solo si es de la forma $L = \mathscr{O}_A(p - e)$ para algún punto $p \in A$. De este modo, resulta que $\hat{A}$ está en biyección con A.

En general, esto no es cierto: los elementos de $\hat{A}$ no pueden ponerse en correspondencia con A de una manera natural. Por ahora, comentaremos el siguiente resultado.

Teorema 8. *Sea A una variedad abeliana. El conjunto $\hat{A}$ viene dotado de manera natural de estructura de variedad abeliana sobre k. Más aún, existe un único fibrado en rectas $\mathscr{P}$ (llamado* fibrado de Poincaré*) sobre $A \times \hat{A}$ satisfaciendo las siguientes dos condiciones.*

(i) *Para todo* $L \in \hat{A}$*, tenemos que la restricción de* $\mathscr{P}$ *a* $A \times \{L\}$ *es isomorfa a* L*.*
(ii) *La restricción de* $\mathscr{P}$ *a* $\{e\} \times \hat{A}$ *es trivial.*

Una observación importante es la siguiente. Dada una variedad abeliana A y su dual $\hat{A}$, podemos considerar la variedad doble-dual $\hat{\hat{A}}$. Como es usual, tenemos que $\hat{\hat{A}} \cong A$. Más aún, el fibrado de Poincaré en $\hat{A} \times \hat{\hat{A}}$ coincide con el de $A \times \hat{A}$, luego de identificar.

De este modo, resulta que A y $\hat{A}$ son espacios de moduli uno del otro, y con la misma familia universal. Esto fue utilizado por Mukai para demostrar el siguiente resultado.

Teorema 9 (Mukai, 1981)**.** *Sea* A *una variedad abeliana y sea* $\hat{A}$ *su variedad abeliana dual. Luego, se tiene que* $\mathrm{D}^b(A) \cong \mathrm{D}^b(\hat{A})$*.*

La demostración original de Mukai es bastante directa, aunque utiliza ingredientes avanzados de la teoría de variedades abelianas. Una manera levemente distinta de argumentar es la siguiente.

(1) Definimos el functor
$$\Phi\colon\ \mathrm{D}^b(\hat{A}) \to \mathrm{D}^b(A)$$
de la siguiente forma. Consideramos la variedad producto $\hat{A} \times A$, junto con las proyecciones p, q hacia $\hat{A}$ y A, respectivamente. Con ello en mente, definimos
$$\Phi(E) = Rq_*(\mathscr{P} \overset{L}{\otimes} Lp^*(E)).$$
Por composición, es directo ver que Φ es un functor exacto.
(2) Un cálculo directo muestra que
$$\Phi(\mathscr{O}_x) = \mathscr{P}|_{x \times A}$$
para todo $x \in \hat{A}$. Esto es un resultado completamente general. Pero como $\mathscr{P}$ es el fibrado de Poincaré, resulta que el lado derecho es isomorfo al fibrado asociado a x.
(3) Para verificar que Φ es *fully faithful*, la teoría general nos dice que basta verificar lo siguiente: para todos $x, y \in \hat{A}$, y para todo $k \in \mathbb{Z}$, el functor Φ induce una biyección
$$\mathrm{Ext}^k_{\hat{A}}(\mathscr{O}_x, \mathscr{O}_y) \to \mathrm{Hom}^k_{\mathrm{D}^b(A)}(\Phi(\mathscr{O}_x), \Phi(\mathscr{O}_y)).$$
El lado izquierdo se puede calcular directamente: tenemos
$$\mathrm{Ext}^k_{\hat{A}}(\mathscr{O}_x, \mathscr{O}_y) = \begin{cases} 0 & x \neq y, \\ 0 & x = y, k \notin [0, \dim \hat{A}] \\ \text{1-dimensional} & x = y, k = 0, \\ \wedge^k T_{\hat{A},x} & x = y, k \in [1, \ldots, \dim \hat{A}]. \end{cases}$$
Un criterio debido a Bondal–Orlov (con una demostración simplificada por Bridgeland) nos dice que no es necesario verificar el último caso. Esto se traduce en calcular cohomología de fibrados en rectas sobre A, lo que es conocido de la teoría general.

(4) Para concluir, la teoría general indica que Φ es esencialmente sobreyectivo, pues A y $\hat{A}$ tienen divisor canónico trivial. (Esto puede formularse de manera más general, en términos de cierta compatibilidad de Φ con los divisores canónicos de A y $\hat{A}$.)

Por supuesto, hay bastantes detalles que verificar. En cualquier caso, ese enfoque de Mukai dió lugar a una teoría general de functores de la forma

$$Rq_*(\mathscr{K} \overset{L}{\otimes} Lp^*(-)),$$

llamados *transformadas de Fourier–Mukai*. Por otro lado, una buena intuición a tener de acá es que para una variedad X y un espacio de moduli M en X, sus categorías derivadas deberían detectar esta relación.

De hecho, un resultado general de Orlov dice que si $\Phi\colon \mathrm{D}^b(X) \to \mathrm{D}^b(Y)$ es una equivalencia, entonces Φ debe ser una transformada de Fourier–Mukai (y de hecho el *kernel* $\mathscr{K}$ asociado es único). Con ello, esta idea de "espacios de moduli" debería persistir.

4. Flops en tres dimensiones

Para continuar, discutiremos brevemente un resultado bastante general de Bridgeland para relacionar flops entre variedades de dimensión 3. Para ello, sea Y una variedad suave proyectiva de dimensión 3. Una *contracción flop* es un morfismo birracional $f\colon Y \to X$ satisfaciendo las siguientes condiciones.

- f solo contrae curvas.
- Existe un divisor D en Y tal que D es f-amplio.

Tal contracción admite un *flop* $g\colon W \to X$ si existe una variedad W, y un morfismo birracional g tales que se cumple lo siguiente.

- g solo contrae curvas.
- La transformada estricta de D en W es g-anti-amplio.

La existencia de flops (y de flips) en tres dimensiones fue resultado de varios trabajos entre 1980 y 1990. De hecho, conocemos la existencia de dichos tipos de operaciones en bastante generalidad, gracias al trabajo de Birkar, Cascini, Hacon y McKernan. Informalmente, los flops relacionan distintos modelos minimales para una variedad.

El siguiente resultado de Bridgeland muestra que variedades relacionadas por un flop en tres dimensiones son equivalentes derivadas. Esto, junto al resultado de Orlov, da una intuición interesante para entender el programa de modelos minimales (MMP) en tres dimensiones: es una manera de *minimizar* categorías derivadas.

Teorema 10 (Bridgeland, 2002)**.** *Sea $f\colon Y \to X$ una contracción flop en dimensión 3. Supongamos que $\omega_Y = f^*\omega_X$, y que X tiene singularidades terminales. Luego, se tiene lo siguiente.*

- *El flop de f existe, digamos $g\colon W \to X$. Adicionalmente W es suave y g es crepante.*
- *Las variedades Y y W son equivalentes derivadas.*

La demostración del teorema de Bridgeland es bastante técnica, pero es preciosa. En primer lugar, puede ser inesperado que enunciemos la existencia del flop como parte de los resultados. Esto es porque la demostración de Bridgeland construye este flop como un espacio de moduli para un cierto problema de moduli en X.

Informalmente, la idea es la siguiente. En primer lugar, tenemos que $Rf_*\mathscr{O}_Y = \mathscr{O}_X$, y así el functor $Lf^*\colon \mathrm{D}(X) \to \mathrm{D}(Y)$ es fully faithful. Con ello, resulta que tenemos una descomposición semi-ortogonal

$$\mathrm{D}(Y) = \langle \ker Rf_*, \mathrm{D}(X)\rangle.$$

Con ello, para W esperaríamos tener una construcción similar. Así, la mayor dificultad del trabajo de Bridgeland es identificar una subcategoría en $\mathrm{D}(Y)$ que corresponda a W (i.e. que parametrice los $\mathscr{O}_w$).

De hecho, la propuesta es bien interesante. Si $y \in C \subseteq Y$ es un punto en una curva (suave, racional) excepcional para f, entonces tenemos una secuencia corta exacta

$$0 \to \mathscr{O}_C(-1) \to \mathscr{O}_C \to \mathscr{O}_y \to 0.$$

Los axiomas de categoría triangulada nos permiten escribir esto como

$$\mathscr{O}_C \to \mathscr{O}_y \to \mathscr{O}_C(-1)[1] \to *.$$

Acá, el primer elemento está en $\mathrm{D}(X)$, mientras que el tercero está en $\ker Rf_*$. La idea de Bridgeland es que los puntos de w deberían corresponder a triángulos de la forma

$$\mathscr{O}_C(-1)[1] \to E \to \mathscr{O}_C \to *.$$

Luego de ello, el resto del trabajo es parecido a la situación de variedades abelianas. Primero, uno demuestra que el problema de moduli asociado a "parametrizar los E" es representable, y obtenemos un objeto universal. Segundo, uno verifica las hipótesis del criterio de Bondal–Orlov para obtener que el functor inducido por esa familia es fully faithful. Tercero, uno usa eso para verificar que el functor es esencialmente sobreyectivo, y que g satisface las otras propiedades.

5. Flop de Mukai

Para nuestro último ejemplo consideramos la siguiente situación. Sea X una variedad de dimensión $2n$, con $n \geq 2$, y $P \subseteq X$ una subvariedad de dimensión n, isomorfa a $\mathbb{P}^n$, y con $N_{X/P} = \Omega_P$. Podemos imitar la construcción del flop estándar. Acá, al hacer el blow-up de X sobre P, resulta que el divisor excepcional es

$$I \subseteq P \times P^+,$$

la *variedad de incidencia* entre P y P^+. El mismo tipo de construcción anterior muestra que podemos obtener una variedad $X^+ \supseteq P^+$. Llamamos al morfismo inducido $X \dashrightarrow X^+$ el *flop de Mukai.*

Históricamente, Mukai introdujo estos flops en 1984. Su construcción es bastante estudiada, pues si X es una variedad hyper-Kähler de dimensión $2n$, entonces toda subvariedad $\mathbb{P}^n \subseteq X$ tiene fibrado normal $\Omega_{\mathbb{P}^n}$. Más aún, el flop asociado también es una variedad hyper-Kähler.

Teorema 11 (Namikawa, 2003; Kawamata, 2002)**.** *Sean X y X^+ como en el caso anterior. Tenemos que $\mathrm{D}^b(X)$ y $\mathrm{D}^b(X^+)$ son equivalentes derivadas. No obstante, el functor $Rp^+_* \circ Lp^*$* no *es una equivalencia.*

Las dos demostraciones, debidas a Namikawa y Kawamata, son distintas en espíritu. En la demostración de Namikawa, la idea básica es reemplazar el blow-up Y por $Y \cup (P \times P^+) \subseteq X \times X$. Esta es una unión de dos variedades a lo largo del divisor excepcional, por lo que los cálculos involucrados requieren bastante trabajo.

En cambio, la idea de Kawamata es muy interesante desde un punto de vista técnico. Imaginemos que tenemos la siguiente situación: encontramos una base suave $S \ni 0$ y dos familias $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \to S$. Dado un objeto $\mathscr{K} \in \mathrm{D}^b(\mathcal{X} \times_S \mathcal{Y})$, podemos ensamblar una *transformada de Fourier–Mukai sobre* S. En nuestro caso, resulta que podemos tomar $S = \mathscr{A}^1$, y extender X, Y para caer en el flop estándar. Resulta que el kernel anterior *es* un kernel sobre S.

Para concluir, resulta que si $\mathscr{K}$ induce una equivalencia, su restricción a $X \times Y$ también induce una equivalencia. Esto permite concluir la equivalencia derivada. Así, esta construcción queda en un "punto intermedio" entre ver el problema como descomposiciones semi-ortogonales, y verlo como un problema de moduli.

Department of Mathematics, Columbia University, 2990 Broadway, New York, NY 10027, USA

Email address: `nivilches@math.columbia.edu`