Constantes de Seshadri en superficies

Gian

Para una variedad irreducible nosingular X y L divisor nef, dado $x \in X$ se definió:

$$0 \leq \varepsilon(L;x) = \max\{\varepsilon \geq 0 \;/\; \mu^*L - \varepsilon E \text{ es nef}\}$$

donde $\mu : Bl_x(X) \to X$. Tomando las imágenes de curvas

$$\varepsilon(L;x) = \operatorname*{Inf}_{\substack{x \in C \\ C \text{ irred.}}} \left\{ \frac{L \cdot C}{\operatorname{mult}_x C} \right\}$$

§1 → Sea X = superficie proyectiva nosingular. Entonces

$$0 \leq \varepsilon(L;x) \leq \sqrt{L^2}$$

ya que $(\mu^*L - \varepsilon E)^2 \geq 0$. Si $L^2 = 0 \Rightarrow$ nada que decir.
Si $L^2 > 0 \Leftrightarrow L$ es big (y nef).

<u>Prop</u>: Sea L big y nef y $x \in X$ tal que $\varepsilon(L,x) < \sqrt{L^2}$. Entonces existe una curva irreducible C tal que

$$\varepsilon(L;x) = \frac{L \cdot C}{\operatorname{mult}_x C}$$

<u>Obs</u>/.- De esta forma, $\varepsilon(L;x) = \sqrt{L^2}$ o se calcula a través de una curva. Cuando $\varepsilon(L;x) = \sqrt{L^2} \Rightarrow$ podríamos necesitar una sucesión de curvas, ya que $\sqrt{L^2}$ podría no ser $\mathbb{Q}$.
<u>A la fecha</u> no existe ejemplo con $\varepsilon(L;x)$ irracional.

<u>Dem</u>/.- • Asumir $\varepsilon(L,x) < \sqrt{L^2}$. Tomar α tal que $1 < \alpha < \dfrac{\sqrt{L^2}}{\varepsilon(L,x)}$.

• Mirar $0 \to \mathcal{O}_X(kL) \otimes m_x^m \to \mathcal{O}_X(kL) \to \mathcal{O}_X/m_x^m \to 0$

Luego si $h^0(kL) - \dfrac{m(m+1)}{2} > 0 \Rightarrow \exists\, D \in H^0(kL)$ con $\operatorname{mult}_x D \geq m$.

- Por el teorema asintótico de Riemann-Roch, como L es nef $\Rightarrow$ $h^0(kL) = \frac{L^2 \cdot k^2}{2} + O(k)$ {Mirar Kollár "Rat. Curves on alg. Var." o Positivity I, Lazarsfeld}
- Luego elegimos k y m tal que $\frac{m}{k} \to \sqrt{L^2}$, m, k enteros positivos. $k \gg 0$
- Luego, para $k \gg 0$, tomar $D \in |kL|$ y m con $m/k \to \sqrt{L^2}$

$$\Rightarrow \frac{L \cdot D}{mult_x D} \leq \frac{k \cdot L^2}{m} \xrightarrow[k\to\infty]{} \sqrt{L^2} \quad \text{y así para } k \gg 0$$

$$(*) \quad \frac{L \cdot D}{mult_x D} < \alpha\sqrt{L^2} \quad (\text{ya que } \alpha > 1)$$

- Sea $\{C_n\}$ sucesión de curvas con $\frac{L \cdot C_n}{mult_x C_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{E}(L;x) < \frac{\sqrt{L^2}}{\alpha}$

$$\Rightarrow \text{para } n \gg 0, \quad \frac{L \cdot C_n}{mult_x C_n} < \frac{\sqrt{L^2}}{\alpha} \quad . \ (**)$$

- Fijar D en $(*)$. Luego para toda C_n en $(**)$ tenemos $C_n \subset D$. Sino, D y C_n se intersectan propiamente y

$$kL \cdot C_n = D \cdot C_n \underset{(\text{Fulton!})}{\geq} mult_x D \cdot mult_x C_n \underset{(\substack{*\\**})}{>} \frac{L \cdot D}{\alpha\sqrt{L^2}} \cdot \frac{\alpha L \cdot C_n}{\sqrt{L^2}} = kL \cdot C_n \rightarrow\leftarrow$$

- Así, $C_n \subset D$ $\forall n \gg 0$ (a partir de cierto n) $\Rightarrow$ C_n son finitos $\Rightarrow$ uno de ellos al menos debe calcular $\mathcal{E}(L;x) = \frac{L \cdot C_n}{mult_x C_n}$ ∎

obs/.- En efecto, acumulación por debajo de $\sqrt{L^2}$ <u>no</u> es posible.

Def/.- Una curva C tal que $\frac{L \cdot C}{mult_x C} < \sqrt{L^2}$ se llama <u>seshadri sub-max</u>.

obs/.- Para una variedad fija y L fijo, las constantes de Seshadri es constante fuera de una unión numerable de subvariedades propias, y solo puede decaer. Así, si se logra $\sqrt{L^2}$ en un punto $\Rightarrow$ es el comportamiento genérico.

(Mirar Post. I p. 272 ; Sería muy bueno hablar del paper "Seshadri Constant for a family of surfaces" K. Oguiso, 6 páginas) ③

→ Para una variedad X, decimos que n puntos de X están en posición muy general si los puntos pertenecen a $X^n \setminus$ conj numerable de cerrados propios en X^n.

Sean $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}^2$ puntos en posición muy general y $X_n = Bl_{p_1,\dots,p_n}(\mathbb{P}^2) \xrightarrow{\sigma} \mathbb{P}^2$. Sean $d, m_1, \dots, m_n \geq 1$
$\Rightarrow$ queremos calcular $h^0(dH - \sum_{i=1}^{n} m_i E_i)$
donde $E_1, \dots, E_n$ excepcionales de σ y $H = \sigma^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$.

Por Riemann-Roch : $h^0(dH - \sum_{i=1}^{n} m_i E_i) = h^1(dH - \sum_{i=1}^{n} m_i E_i) + \frac{d(d+3)}{2} - \sum \frac{m_i(m_i+1)}{2} + 1$

Def 1.- $\mathcal{L}(d; m_i) := |dH - \sum_{i=1}^{n} m_i E_i|$ es especial si $h^0(\mathcal{L}) > 0$ y $h^1(\mathcal{L}) > 0$.

Ejemplo clave : Asumir $h^0(\mathcal{L}) > 0$ y $E = (-1)$-curva tal que $E \cdot \mathcal{L} = -n \leq -2$.
Entonces $nE \subset |\mathcal{L}|$ y $h^1(\mathcal{L}) \neq 0$.
Dem/.- obviamente $nE \subset |\mathcal{L}|$. También tenemos
$0 \to H^1(\mathcal{L}-E) \to H^1(\mathcal{L}) \to H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{L}|_E) \to H^2(\mathcal{L}-E)$
But $K - (\mathcal{L}-E) = K - \text{Eff}$ and $\cdot H$ is negative $\Rightarrow H^0(K - \mathcal{L} + E) = 0$.
Also $\mathcal{L}|_E$ has dual $\mathcal{O}(-2+n)$ so $h^1(\mathcal{L}|_E) \neq 0$
$\therefore H^1(\mathcal{L}) \neq 0$ ∎

Conjetura (SHGH): $\mathcal{L}$ es especial $\Leftrightarrow$ estamos en el ejemplo anterior ((-1)-especial)

Conjetura (−1): Si Γ es una curva irred de $X_n \Rightarrow \Gamma^2 \geq -1$. Si $\Gamma^2 = -1 \Rightarrow \Gamma$ (-1)-curva.

Conjetura (Nagata): Si $n \geq 10$ y $h^0(\mathcal{L}(d; m_i)) > 0 \Rightarrow \sqrt{n} \cdot d \geq m_1 + \dots + m_n$.

Prop/r (SHGH) $\Rightarrow$ (−1) $\Rightarrow$ (Nagata).

Dem/.- (SHGH) $\Rightarrow$ (-1). Si Γ no es (-1)-curva $\Rightarrow$ $\mathcal{O}(\Gamma)$ no es (-1)-especial $\Rightarrow$ $h^0(\Gamma) = \underline{\Gamma^2 - \Gamma K} + 1 = \Gamma^2 - (pa(\Gamma) - 1) + 1 > 0$
$\Rightarrow \Gamma^2 > pa(\Gamma) - 2$ ie $\Gamma^2 \geq pa(\Gamma) - 1 \geq -1$. Si $\Gamma^2 = -1 \Rightarrow \Gamma$ es (-1)-curva.

(-1) $\Rightarrow$ (Nagata). Suficiente mostrarlo con divisores primos de un $\mathcal{L}(d; m_1, \ldots, m_n)$.
Si $\sqrt{n}\, d < m_1 + \cdots + m_n \Rightarrow$ Por Cauchy-Schwarz

$$d^2 < \frac{(m_1 + \cdots + m_n)^2}{n} \leq m_1^2 + \cdots + m_n^2$$

$$\Rightarrow \Gamma^2 < 0 \underset{(-1)}{\Longrightarrow} \Gamma^2 = -1 \text{ y genero } 0. \text{ Pero}$$

$$1 = -\Gamma \cdot K = 3d - (m_1 + \cdots + m_n) \leq \sqrt{n}\, d - (m_1 + \cdots + m_n) < 0$$

Teorema (Dumnicki-Küronya-Maclean-Szemberg 2013) Sea $n \geq 9$ un entero tal que SHGH es cierto. Entonces, puede pasar una de las siguientes:

a) $\exists L$ en X_n amplio tal que $\varepsilon(L; x) = \sqrt{L^2}$ irracional en algún x

b) SHGH es falsa para $n+1$ puntos.

("Seshadri constants via Okounkov functions and the SHGH" 13 páginas!)

Cor: Si todas los $\varepsilon(L; x)$ para el blow-up de $\mathbb{P}^2$ en 9 puntos son racionales $\Rightarrow$ SHGH no es cierta para 10 puntos.

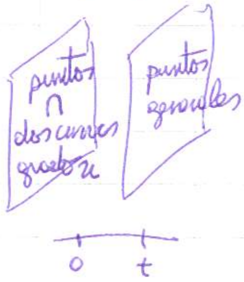
obs/.- La conjetura de Nagata es cierta para $n = u^2$. Primero notar el equivalente Seshadri para cualquier n:

$$(\text{NAGATA}) \iff H - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} E_i \text{ nef.}$$

dem/.- Si $H - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} E_i$ nef $\Rightarrow \left(H - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} E_i\right) \underbrace{\left(dH - \sum_{i=1}^{n} m_i E_i\right)}_{\text{efectivo se asume}} \geq 0 \Rightarrow$ Nagata

Si $\left(H - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} E_i\right) \Gamma$ donde $\Gamma = \begin{cases} E_i \\ dH - \sum m_i E_i \end{cases} \underset{\text{Nagata}}{\Longrightarrow} \geq 0 \Rightarrow$ nef.

Ahora, para $n = u^2$ tenemos un argumento bajo degeneración.



Miremos $\mathcal{L}_t = \mathcal{O}(uH - \sum_{i=1}^{u^2} E_i)$

$\Rightarrow$ obviamente $\mathcal{L}_0$ es neg ya que define un pencil. Pero neg $\Rightarrow$ neg en una vecindad (ver Positivity I, página 56)

(Nuevamente las ideas giran en torno de degeneraciones, y en efecto ese ha sido (algunas veces) el camino para acercarse a Nagata (ver Miranda-Ciliberto-etc). Creo que se debe hablar de degeneraciones paper arriba + Ein-Lazarsfeld abajo +...)

§2 Cotas inferiores.

$\rightarrow$ Si uno tiene L amplio sin puntos base.

$\Rightarrow$

$$L \cdot C \underset{\substack{D \not\supset C \\ x \in D}}{=} D \cdot C \geq \mathrm{mult}_x D \cdot \mathrm{mult}_x C$$

(tomar D_1, D_2 intersectándose fuera de x (amplio) no en C ∴ Pencil)

$\Rightarrow \quad \varepsilon(L, x) \geq \mathrm{mult}_x D \geq 1$

$\rightarrow$ Si L es en efecto muy amplio y $X \supset$ recta en la correspondiente incrustación $X \subset \mathbb{P}(|L|) \Rightarrow \varepsilon(L; x) = 1$ (ya veremos más sobre eso vía Thomas Bauer)

<u>Teo</u>: L = amplio $\Rightarrow \varepsilon(L, x) \geq 1$ para todo punto x excepto un número a lo más numerable.

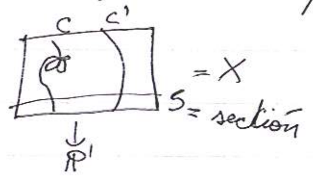
(Ein-Lazarsfeld: "Seshadri constants on smooth surfaces" 9 páginas).

→ Ejemplo Rick Miranda: Dado $\delta > 0$ existe superficie X, punto $x \in X$, L = amplio tal que $\varepsilon(L,x) < \delta$.

- $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$ curva de grado d con un punto p de multiplicidad $m > \frac{1}{\delta}$.
- $\Gamma' \subset \mathbb{P}^2$ curva de grado d transversal a Γ
- Tomando $d \gg 0$ y Γ' suficientemente general $\Rightarrow$ se puede asumir que todas las fibras del pencil son irreducibles.

(Contar polinomios reducibles en $d_1 \neq d_2$ con $d_1 + d_2 = d$ $\Rightarrow$ dentro de los de grado $d \gg 0$, los reducibles no alcanzan para divisor. Así, dado Γ irred, podemos trazar línea de irreducibles ie Pencil.)

- $\mu : X = Bl_{\Gamma \cap \Gamma'}(\mathbb{P}^2) \longrightarrow \mathbb{P}^2$ da origen a pencil



- Sea $a > 0$ entero, $L := aC + S$

Luego L es amplio si $a \geq 2$: En efecto $L^2 = 2a - 1$, $L \cdot S = a - 1$, $L \cdot C = 1$, y

1) Si $T \subseteq X$ curva dominando $\mathbb{P}^1$ $\Rightarrow$ $T \cdot C > 0$ $\Rightarrow$ $L \cdot T > 0$
2) Por constr cualquier fibra es equivalente a C. $\therefore$ L es amplio.

- Luego $\varepsilon(L;p) \leq \dfrac{L \cdot C}{mult_x(C)} = \dfrac{1}{m}$. Notar que a es arbitrario.

Conj: El resultado de Ein-Lazarsfeld es valido para L nef y big.

Teo (Ein-Küchle-Lazarsfeld) X = irred proj var. dim n, L nef y big
$\Rightarrow$ $\varepsilon(L;x) \geq \frac{1}{n}$ para puntos muy generales $x \in X$.

Teo (Steffens): X = superficie L amplio $\rho(X) = 1$
$\Rightarrow$ $\varepsilon(L;x) \geq \lfloor \sqrt{L^2} \rfloor$ para x muy general.

(paper "Remarks on Seshadri constants" 5 páginas!)

$\Rightarrow$ si $\sqrt{L^2} \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $\varepsilon(L;x) = \sqrt{L^2}$ para x muy general.