(1)

17/Junio/2016

W-superficies y sus modelos minimales.

Sea $\mathbb{D}$ = germen de una curva en punto suave.
Sea X = superficie normal con sólo singularidades cocientes.
Una suavización de X es una deformación $X \subset \mathfrak{X} \to 0 \in \mathbb{D}$ tal que X_t es suave. Es suavización $\mathbb{Q}$-Gorenstein si $K_{\mathfrak{X}}$ es $\mathbb{Q}$-Cartier.

Def: $p \in X$ sing. cociente es T-singularidad si posee una suavización $\mathbb{Q}$-Gorenstein.

Teorema [KSB]: Una T-singularidad es ADE o $\frac{1}{dn^2}(1, dna-1)$ con $(n,a)=1$.
Los últimos tienen una única def. $\mathbb{Q}$-Gorenstein de dimensión d y su resolución minimal se encuentra recursivamente a partir de $[4]$, $[3,3]$, $[3,2,3]$, $[3,2,2,3]$, ...

Def.- Una sing. de Wahl es $\frac{1}{n^2}(1, na-1)$, $(n,a)=1$ (ie a partir de $[4]$).

Motivación para estas singularidades.

1) Son parte de estas sing raras que admiten una suavización con número de Milnor igual a cero. Hoy en día existe una clasificación de ellas.
2) Aparecen naturalmente en degeneraciones de fibraciones elípticas reducida por el colapso de una múltiple con una nodal.
3) Teorema [Kollár, Kawamata, etc...]
Sea $\mathfrak{X}' \to \mathbb{D}$ una familia de superficies proyectivas con $\mathfrak{X}'_t$ no singular si $t \neq 0$, $\kappa(\mathfrak{X}'_t) \geq 0$. Entonces existe un $\mathfrak{X} \to \mathbb{D}$ modelo minimal de una reducción semi-estable de $\mathfrak{X}' \to \mathbb{D}$ tal que $\mathfrak{X}$ es un 3-fold con sólo sing. $\mathbb{Q}$-factoriales terminales, $K_{\mathfrak{X}}$ nef, $\mathfrak{X}_t$ no sing minimales para $t \neq 0$, $\mathfrak{X}_0$ reducida con sing:
 (i) de Wahl (ii) cruce normal orbifold $\{xy=0\} \subset \frac{1}{n}(a, n-a, 1)$ $(n,a)=1$.
 (iii) cruce normal simple $\{xy=0\} \subset \mathbb{C}^3$ o $(xyz=0) \subset \mathbb{C}^3$.
4) Identificación KSBA surfaces y Milnor fibers of quot. sing.
5) Exceptional collections!

② En caso:

(i) la sing. de $\mathfrak{X}$ es localmente $\{xy = z^n + t\} \subset \frac{1}{n}(1,-1,a) \times \mathbb{A}^1_t$

(ii) " " " " " " $\{xy = t\} \subset \frac{1}{n}(1,-1,a) \times \mathbb{A}^1_t$

(iii) $\{xy = t\}$ ~~o~~ $\{xyz = t\}$.

$\therefore$ Se espera que la singularidades de Wahl den origen a divisores genéricos en el KSBA moduli de superf. algebraicas.

Obs.- Queremos estudiar este tipo de degeneraciones en forma sistemática para el caso: "fibra central con singularidades cocientes".

Def.- Una W-superficie es una superficie proyectiva normal X junto con una deformación propia $(X \subset \mathfrak{X}) \longrightarrow (0 \in \mathbb{D})$ (morfismo propio analítico sobre) tal que:

(1) X tiene a lo más sing. de Wahl.

(2) $\mathfrak{X}$ es un 3-fold normal analítico con $K_{\mathfrak{X}}$ $\mathbb{Q}$-Cartier

(3) $\mathfrak{X}_0$ es reducida e isomorfa a X

(4) $\mathfrak{X}_t$ es nosingular si $t \neq 0$.

Obs.- degeneraciones moderadas de Kawamata.

Propiedades:

(1) $\mathfrak{X}$ tiene sing. terminales y es $\mathbb{Q}$-factorial.

(2) Se usa propio y no proyectivo ya que tendremos que operar sobre la deformación.

Ejemplo (Artin) Si $X \subset \mathfrak{X} \to 0 \in \mathbb{D}$ es degeneración de cuárticas suaves en $\mathbb{P}^3$ con $\mathrm{Pic}(\text{cuárt}) = \mathbb{Z}$ y $X' \subset \mathfrak{X}' \to 0 \in \mathbb{D}$ resolución de $X =$ cuártica con nodo $\Rightarrow \mathfrak{X}'$ no es esquema. Si $\Theta \subset X'$ es el divisor excepcional y $C_t \in \mathfrak{X}'_t$ es generador de $\mathrm{Pic}(\mathfrak{X}'_t)$ $\Rightarrow C_0 = \lim_{t \to 0} C_t$ es tal que $C_0 \cdot \Theta = 0$ (ver geométricamente) Si $\mathfrak{X}'$ fuese esquema $\Rightarrow$ tomar $\mathcal{U}$ afín con $\mathcal{U} \cap \Theta \neq \emptyset$. Como $\mathfrak{X}'$ nosing, $\mathfrak{X}' \setminus \mathcal{U} =$ divisor Cartier $D \Rightarrow D \sim r C_t$ $r > 0$.
$\Rightarrow D_0 \sim r C_0 \Rightarrow D_0 \cdot \Theta = 0 \Rightarrow \Theta \subset \mathcal{U}$ $\rightarrow\!\leftarrow$.

Esencial que $p_g \geq 1$ ya que $p_g = 0 = q$ $\Rightarrow$ Proyectivo.

(3)

(3) $K_{X_t} = K_{\mathcal{X}}|_{X_t}$ para todo t y ($\mathbb{Q}$-Gorenstein) $K^2_{X_t}$ es constante.
$\chi_{top}(X_t)$ es constante por prop. topológicas de la suavización.

En X, $K_X^2 + \chi_{top}(X) = 12\,\chi(\mathcal{O}_X)$ y $K_{X_t}^2 + \chi_{top}(X_t) = 12\,\chi(\mathcal{O}_{X_t})$
$\Rightarrow \chi(\mathcal{O}_X) = \chi(\mathcal{O}_{X_t})\ \forall t$.
Luego como $q(X_t) = \dim H^1(X_t, \mathcal{O}_{X_t})$ es constante [GS83 real]
$\Rightarrow p_g(X_t)$ es constante.

(4) Como tenemos $\mathbb{Q}$-factor. $\Rightarrow$ una curva degenerada y otra generan divisores cuyas intersecciones podemos comparar.
(para $\frac{1}{dn^2}$ no tenemos eso!)

Def. W-super. X es minimal si K_X es nef.
Lema. Si W-super. X es minimal $\Rightarrow K_{X_t}$ es nef $\forall t$.
Demostración: La idea es mostrar degeneración de curvas (-1) en X_t $t\neq 0$ a X_0 y así provocar ~~alguna~~ $K_{X_0}\cdot$ curva <0.
Podría haber una sucesión en principio, pero no. detalles en paper ∎

Entonces tenemos 3 opciones: Γ extremal ~~ray~~ rational curve en X con $\Gamma \cdot K_X < 0$.
(I) $\Gamma^2 > 0 \Rightarrow \mathrm{Pic}(X)$ tiene rango 1 y $-K_X$ es amplio [KK94, 2.3.3]
$\therefore -K_t$ es amplio $\forall t$ [KM98, Prop 1.41] $\Rightarrow X_t$ es racional $\forall t$.
Como rango $\mathrm{Pic}(X) = 1 \Rightarrow e(X_t) = 3 \Rightarrow X_t = \mathbb{P}^2$. $t \neq 0$. ($p_g = 0 = q\ \forall t$)

$\therefore$ $X \rightsquigarrow \mathbb{P}^2$ X = normal (en general, $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}$-Gorenstein) Clasif. por Manetti y Paul-Prokhorov: X es una deform. $\mathbb{Q}$-Gorenstein de $\mathbb{P}(a,b,c)$ con $a^2+b^2+c^2 = 3abc$.

(II) $\Gamma^2 = 0 \Rightarrow$ [KK94] $\exists h : X \to B$ fibración con fibras irreducibles y fibra general $\simeq \mathbb{P}^1$. Entonces Wahl singularidades imponen posibilidades en las fibras donde están: 2 config. posibles.
Pero no son posibles $\Rightarrow X$ es suave y $X \subset \mathcal{X} \to 0 \in \mathbb{D}$ es deformación suave de una $\mathbb{F}_n$. (no neces. trivial!!!)

4

(III) $M^2 < 0$ → tendremos que aplicar una transformación birracional $(X \subset \mathcal{X}) \to (0 \in \mathbb{D})$ de tipo mk1A o mk2A que puede ser un flip o una contracción divisorial.

Luego tendremos situación del mismo tipo y repetimos el algoritmo.

Obs.- Después de un flip, los índices n de las sing. de Wahl $\frac{1}{n^2}(1, na-1)$ decrecen estrictamente. Después de una contracción divisorial el # de Picard decrece.

Conclusión: el proceso para con K neg o en casos I y II.

Prop: El modelo minimal es único.

Prop: W-superficie X con $K_X^2 > 0$ y K_X neg. Entonces su modelo canónico relativo $X_{can} \subset \mathcal{X}_{can} \to 0 \in \mathbb{D}$ tiene X_{can} con sólo T-singularidades.

Ejemplos: 1) Naturaleza típica de estas degeneraciones $\mathbb{Q}$-Gorenstein son los espacios proyectivos con pesos.

2) Por cero cohomología. Prop. 4.3 explicada + rectas v/s nodales.

Prop.: $C_1, \ldots, C_n$ un divisor con cruces simples normales (redundante) en W = superficie proyectiva suave $/_{\mathbb{C}}$ con $\boxed{H^0(W, \Omega_W^1) = 0}$. Asumir que existe $1 < m \leq n$ tal que $C_1 + \cdots + C_m \sim -K_W$ y que $C_{m+1}, \ldots, C_n$ son numericamente independientes en $NS(W)$. ($m = n \Rightarrow$ sin 2do requerim.)
$\Rightarrow \quad H^2(W, T_W(-\log(C_1 + \cdots + C_n))) = 0.$

Dem: Se usa $\Omega_W^1(\log(\sum_j^n C_i)) \otimes \mathcal{O}_W(\sum_1^{j-1} C_i) \hookrightarrow \Omega_W^1(\log(\sum_{j+1}^n C_i)) \otimes (\sum_1^j C_i)$ y dualidad de Serre para decir que sólo necesitamos $H^0(\Omega_W^1(\log(C_{m+1} + \cdots + C_n)))$ pero eso se da a través del residue map y clases independientes. ☺

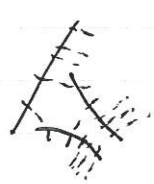
5

Prop: Z = sup. normal proy $/_{\mathbb{C}} \supset W_1, W_2, \ldots, W_r$ cadenas de Wahl disjuntas.
Asumir $\Gamma_0 = \mathbb{P}^1$ disjunto de los $W_1, \ldots, W_r$ y $H^2(T_Z(-\log(W_1 + \cdots + W_r + \Gamma_0))) = 0$
$\Rightarrow \exists$ W-superficie X = contraction de $W_1, \ldots, W_r$ y divisor $\Gamma \subset \mathcal{X}$ con
$\Gamma/_{X_t} = \mathbb{P}^1$ y $\Gamma/_X = \Gamma_0$.

Dem: Idea hacer negativa la Γ y liftear los (-1) $\therefore$ down.
Para hacer existir la W-superficie, tenemos por [LP07] que
$H^2(T_Z(-\log(\text{nc}))) = 0 \Rightarrow H^2(T_X) = 0$. Ya que $H^1(\mathcal{T}^1) = 0$
y los cubs. canonicos de las sing son intersecciones completas
$\Rightarrow \mathbb{T}_X^2 = 0 \Rightarrow$ NO obstrucción $\blacksquare$

Ej 1.- Construcción de degeneración de $\Gamma_d \subset \mathbb{P}^2$ curva plana con $\binom{d-1}{2}$ nodos
a conf. de d rectas en posición general.
Asumir $d \geq 6$.

→ Sea $\{L_1, \ldots, L_d\}$ d rectas en posición general
→ $W \xrightarrow{\sigma} \mathbb{P}^2$ blow-up de los $\binom{d}{2}$ puntos comunes .



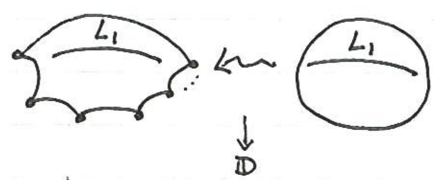
$\therefore \quad K_W \sim \sigma^*(K_{\mathbb{P}^2}) + \sum E_i \qquad \sigma^*(L_1+L_2+L_3) \sim L_1+L_2+L_3+2E_1+2E_2+2E_3 + \sum_{\text{resto}} E_i$

$\Rightarrow \quad K_W \sim -L_1 - L_2 - L_3 - E_1 - E_2 - E_3$

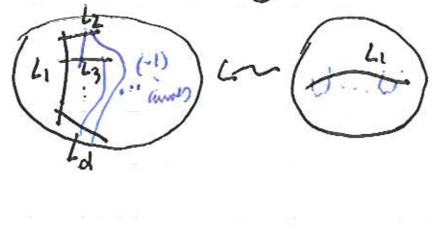
$\therefore$ $L_1, L_2, L_3, E_1, E_2, E_3, L_4, \ldots, L_d$ cumple con Prop.
como $-d+2 \leq -4 \Rightarrow$ hacer blow-ups desde

Para producir $\underbrace{-2 - -2 \ldots -2}_{d-6} - \underset{L_i}{-d+2}$

$\therefore$ Por prop. tenemos



$\therefore$ Bajo $d-1$ flips tendremos



$\Rightarrow$ down a $\mathbb{P}^2$.

→ Repetir definición W-superficie ; modelo mínimal y canónico

W-superficie (No clásico) $\supset$	superficie (clásico)
Teoría intersección	Teoría intersección
Invariantes constantes	Invariantes
MMP: Flip / contracción div. — X_0: Flip: contrae y explota; contracción div.: contrae a sing. wohl — X_t: Flip: nada; contracción div.: contrae una (-1)-curva	MMP: sólo usa contracciones de curvas (-1)
Resultado MMP: reglada (MMP a $\mathbb{P}^2$ o def. suave de $\mathbb{P}_C(\mathcal{E})$) o MM único	Resultado MMP: reglada ($\mathbb{P}^2$ o $\mathbb{P}_C(\mathcal{E})$) o MM único
K_X neg y $K_X^2>0$ $\Rightarrow$ Modelo canónico único con T-singularidades	K_X neg y $K_X^2>0$ $\Rightarrow$ Modelo canónico único con sing. ADE

→ Hacer ejemplo completo hasta llegar a la W-superficie donde aplicaremos los flips.

<u>Teo</u> (Flip usual): Sea X una W-superficie y $\Gamma\subset X$ tal que $\Gamma\cong\mathbb{P}^1$ y $\tilde{\Gamma}\subset\tilde{X}$ es una (-1)-curva intersectando transversalmente en un punto la cola de un divisor excepcional de una sing. de wohl ($\tilde{\Gamma}$ disjunto a los otros). Digamos

$$\Gamma - \underset{-e_1}{\frown} - \underset{-e_2}{\frown} \cdots \underset{-e_{s-1}}{\frown} - \underset{-e_s}{\frown}$$

$\Rightarrow$ Existe $X \to Y$, $X\to D$, $Y \to D$ vecindad excepcional $\Gamma\subset X \to 0\in Y$

de tipo <u>flip</u> tal que su flip $\Gamma^+\subset X^+ \to 0\in Y$, $X^+\to D$, $Y\to D$ es

$$\tilde{X}^+_0 = \underbrace{\underset{-(e_i-1)}{\frown} - \underset{-e_{i+1}}{\frown} \cdots \underset{-e_{s-1}}{\frown}}_{\text{se contrae a la nueva wohl.}} - \Gamma^+ \quad , \quad \Gamma^{+2} = -e_s$$

Ej/r El caso más chico es $\underset{\Gamma}{-1} — (-4) \xrightarrow{\text{flip}} (-3) = \Gamma^+$

y en general $\underset{\Gamma}{-1} — \underbrace{-2 — \cdots — -2}_{s} — -(4+s) \xrightarrow{\text{flip}} -(3+s) = \Gamma^+$

Tenemos $[\underbrace{2,2,\dots,2}_{s}, 4+s] = \dfrac{(s+2)^2}{(s+2)\cdot 1 - 1}$ y $K_X \cdot \Gamma = -\dfrac{1}{s+2}$

En general, $\Gamma — \underbrace{[e_1, \dots, e_s]}_{\frac{n^2}{na-1}} \Rightarrow K_X \cdot \Gamma = -\dfrac{a}{n}$

Si $a \geqslant 2 \Rightarrow$ Podemos construir ∞ flips a la misma X^+.
Por ejemplo,

-1 ; $-2 \; -5 \; -3 \;\curvearrowright\; -2 \; -1 \; -6 \; -3 \;\leftarrow\; -2 \; -3 \; -2 \; -2 \; -7 \; -3$; -1

$a=3$

$\curvearrowright\; -2 \; -3 \; -2 \; -1 \; -3 \; -7 \; -3 \;\leftarrow\; -2 \; -3 \; -2 \; -2 \; -2 \; -2 \; -5 \; -7 \; -3$; -1 $\leftarrow$ etc...

En cada paso tendremos sing $\binom{n_i}{a_i}$ en superficie $X_i \supset \Gamma_i = (-1)$-curva

y $K_{X_i} \cdot \Gamma_i = -\dfrac{3}{n_i}$ donde $n_{i+1} + n_{i-1} = 3 n_i$ $\quad \dfrac{n_{i+1}}{n_i} = 3 - \dfrac{1}{\frac{n_i}{n_{i-1}}}$

$\Rightarrow \dfrac{n_{i+1}}{n_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} 3 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{3 - \cdots}} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ $\left(\text{general } \dfrac{\delta + \sqrt{\delta^2 - 4}}{2}\right)$

, ie, $\dfrac{K_{X_i} \cdot \Gamma_i}{K_{X_{i+1}} \cdot \Gamma_{i+1}} \xrightarrow[i\to\infty]{} \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

$\longrightarrow$ Retomar el ejemplo y hacer los flips.

Contracciones divisoriales y flips en general.

Def.: $(Q \in Y)$ germen de singularidad cociente dos dimensional. A proper birational map $f: X \to Y$ se llama P-resolución si f es isomorfismo fuera de Q, X tiene sólo T-singularidades y K_X es amplio relativo a f [KSB88].

$$[2,5] \; \frac{\quad}{} \; [4] \longrightarrow [2,4,3]$$

Def.: Una extremal nbhd $(C \subset \mathcal{X}) \to (Q \in \mathcal{Y})$ es un morfismo propio birracional entre 3-folds normales $F: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ tal que
(1) $K_{\mathcal{X}}$ es $\mathbb{Q}$-Cartier y $\mathcal{X}$ posee solo sing. terminales.
(2) $F^{-1}(Q) =$ irreducible curva $C \subset \mathcal{X}$ (3) $K_{\mathcal{X}} \cdot C < 0$

$Exc(F) =$ excepcional de F

tipo flip si $Exc(F) = C$
$\Downarrow$
$K_{\mathcal{Y}}$ no $\mathbb{Q}$-Cartier
$\Downarrow$
Hacer flip que existe por Mori 1988
y único : $F^+ : \underbrace{(C^+ \subset \mathcal{X}^+)}_{\text{Normal, terminal, } K_{\mathcal{X}^+} \text{ es } F^+\text{amplio}} \to (Q \in \mathcal{Y})$

tipo divisorial si $Exc(F) =$ dim 2
$\Downarrow$
$K_{\mathcal{Y}}$ $\mathbb{Q}$-Cartier, y terminal

Def.: $(Q \in Y)$ germen sing. cociente dim 2, $f: X \to Y$ resolución parcial de Y tal que $f^{-1}(Q) = C = \mathbb{P}^1$ con una (dos) Wahl sing. de X sobre C. Asumir $K_X \cdot C < 0$. Sea $(X \subset \mathcal{X}) \to (0 \in \mathbb{D})$ una suavización $\mathbb{Q}$-Gor de X. Sea $(Y \subset \mathcal{Y}) \to (0 \in \mathbb{D})$ la corresp. blowdown deformación de Y. Luego,

Por J. Wahl o [KM].

$$(C \subset \mathcal{X}) \to (Q \in \mathcal{Y})$$

se llamará extremal nbhd de tipo mk1A (una sing.) o mk2A (dos sing.).

m es por minimalidad del número de Milnor.

Def: Una P-resolución $f^+ : X^+ \longrightarrow Y$ es extremal (Q cíclico)
si $f^{+-1}(Q) = C^+ = \mathbb{P}^1$ y X^+ tiene solo sing. de Wahl (a lo más dos).

Prop: $(C \subset \mathcal{X}) \to (Q \in \mathcal{Y})$ mk1A o mk2A de tipo flip.
$\Rightarrow$ $\exists$ una P-resolución extremal $(C^+ \subset X^+) \longrightarrow (Q \in Y)$
[KM92] tal que $(C^+ \subset \mathcal{X}^+) \to (Q \in \mathcal{Y})$ es obtenida por una blowing down def. de una Q-Gor. suav. de X^+.

Prop: mk1A o mk2A de tipo divisorial $\Rightarrow$ la contr. $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ induce el blow-down de una (-1)-curva entre las fibras suaves y $Q \in Y$ es sing. Wahl.

Descripción Numérica

($X \to Y$ para un mk1A) $\quad X \longrightarrow Y$, $\quad \dfrac{m^2}{ma-1} = [e_1, \dots, e_s]$

$\Rightarrow$ $[e_1, \dots, \bar{e}_i, \dots, e_s]$ tal que $(Q \in Y)$ es $\dfrac{\Delta}{\Omega} = [e_1, \dots, e_i - 1, \dots, e_s]$
donde $0 < \Omega < \Delta$.

Sean para $\frac{m}{q} = [e_1, \dots, e_s]$:

$0 = \beta_{s+1} < 1 = \beta_s < \dots < q = \beta_1 < m = \beta_0 \qquad \beta_{i+1} = e_i \beta_i - \beta_{i-1}$

$0 = \alpha_0 < 1 = \alpha_1 < \dots < q^{-1} = \alpha_s < m = \alpha_{s+1} \qquad \alpha_{i+1} = e_i \alpha_i - \alpha_{i-1}$

$\beta_i = q\alpha_i - m\gamma_i$

$\Rightarrow$ $\Delta = m^2 - \beta_i \alpha_i$, $\quad \Omega = ma - 1 - \gamma_i \beta_i$, $\quad \delta = \dfrac{\beta_i + \alpha_i}{m}$

$$K_X \cdot C = \frac{-\delta}{m} < 0 \qquad C \cdot C = \frac{-\Delta}{m^2} < 0$$

($X \to Y$ for mk2A)

$[f_1, \dots, f_{s_2}]$ $\begin{pmatrix} m_2 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$[e_1, \dots, e_{s_1}]$ $\begin{pmatrix} m_1 \\ a_1 \end{pmatrix}$

$$K_X \cdot C = \frac{-\delta}{m_1 m_2} < 0 \qquad C \cdot C = \frac{-\Delta}{m_1^2 m_2^2} < 0$$

$$\frac{\Delta}{\Omega} = [f_{s_2}, \dots, f_1, 1, e_1, \dots, e_{s_1}]$$

$\Delta = m_1^2 + m_2^2 - \delta m_1 m_2$

$\Omega = (m_2 - \delta m_1)(m_2 - a_2) + m_1 a_1 - 1$