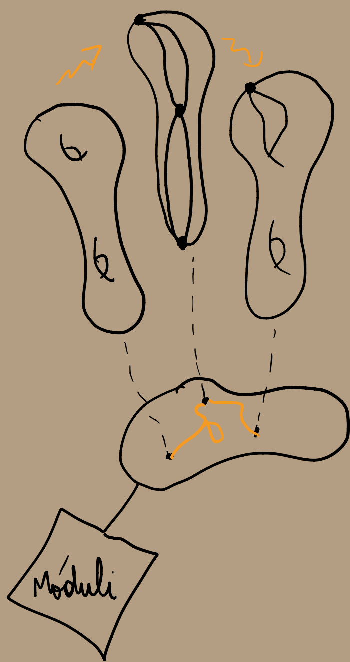


Libro:
« Families of varieties of general type »
J. Kollár 2021

super 1

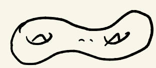
« Móduli y Compact. KSB »

15/3/2022

« Mumford's influence on the Moduli Theory of algebraic varieties » por J. Kollár 27/9/2018.

1. Partamos con variedades suaves proyectivas, y con dimensión 1. Para dim ≥ 2 hay tecnicismos que necesitarán $\mathbb{C}$, así que $k = \mathbb{C}$ desde ahora.

- Curvas suaves proy. $\equiv$ Superficies de Riemann compactas

  $\left\{ \begin{matrix} \text{sistema de} \\ \text{ecuaciones} \\ \text{homogéneas} \end{matrix} \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \right\}$ $\qquad$ $\left\{ \begin{matrix} \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}/\Gamma = \\ \circlearrowleft \Gamma \end{matrix} \right.$  $\Big\}$

  $2 \leq g$ hoyos

  parámetros en los coeficientes, o en las transformaciones

- Moduli es $\pm$ parametrizar objetos con alguna característica dada. Por ejemplo, dado g, ¿cómo podemos describir <u>todas</u> las curvas de género g?

- Primera aproximación: curvas planas.

  Una $C_d \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tiene género $g = \dfrac{(d-1)(d-2)}{2}$.

  - $g=0$: R-R $\Rightarrow C \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ así que no hay móduli, situación rígida.
  - $g=1$: Se puede poner $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ como la cúbica
    $$\{ZY^2 = X(X-Z)(X-\lambda Z)\}$$
    donde λ es el parámetro, el cual al mover poquito cambia la clase de isomorfismo de C.

- $g=2$: Drama! Pero a través de K_C tenemos morfismo $C \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^1$ y un modelo de eso es

$$\{ z^4 y^2 = (x-a_1 z)\dots(x-a_6 z) \} \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$$

y los parámetros son $a_1,\dots,a_6$. Pero se pueden reducir a 3 parámetros con un $\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1_{0,1,\infty}$.

- podríamos extrapolar esto a $C \xrightarrow{p:1} \mathbb{P}^1$ digamos ramificado en 4 puntos (como en $g=1$). Aquí $g=p-1$ y podemos

$$\{ y^p = x(x-1)^a(x-\lambda)^b \}$$

pero la clase de isomorfismo depende continuamente de λ y discretamente de a,b: Hay diferentes componentes para $\lambda \in \mathbb{C}$ en el móduli!

Por otro lado: No toda curva $g=p-1$ tiene ese modelo, hay un espacio de dimensión $3g-3$ que los contiene todos!

- $g=3$: Aquí ganamos y perdemos, $C \xrightarrow{|K_C|} \mathbb{P}^2$ si no es hiperelíptica, pero la genérica no lo es y así las cuárticas planas son genéricamente las curvas de género 3

¿Cuánto móduli? $\binom{4+2}{2} - 1 - 8 = 6 = 3\cdot 3 - 3$

:)

Salvo PGL_3

- ohhh! Entonces, al menos para curvas planas podemos hablar de moduli como $\mathbb{P}^{\binom{d+2}{2}-1}/PGL_3$. Lo malo es que queremos un cociente variedad con morfismos polinomiales.

Solución aquí fue Mumford GIT: $\mathbb{P}^{\binom{d+2}{2}-1}/\!/PGL_3$

∘ En general, Cayley 1862 construye moduli para $C \hookrightarrow \mathbb{P}^3$. (Gross(1,3))
Severi 1915 muestra que para $g \leq 10$, M_g es unirracional, a través de curvas planas nodales.
(no se necesita construir M_g para esto)

2. Grothendieck punto de vista y constr. M_g como variedad.

$$\left\{ \text{Esquemas sobre Spec}\,\mathbb{C} \right\} \xrightarrow{\mathcal{M}_g} \left\{ \begin{array}{l} \text{Familias (smooth flat)} \begin{array}{c} C \\ \downarrow \\ B \end{array} \text{ cuyos} \\ \text{fibras son curvas de} \\ \text{género } g \end{array} \right\} \subset \text{Conjuntos}$$

$$B \longmapsto \mathcal{M}_g(B) = \{\text{Familias}/B\}/\sim \text{ isomorfismo}$$

Será ese Functor representable? i.e. existirá un esquema M_g e isomorfismo de functores $\Psi : \mathcal{M}_g \longrightarrow \mathrm{Mor}(\_\_, M_g)$.

∘ ie Todos las familias sobre un B $\equiv$ Todos los morfismos $B \to M_g$

∘ Si $\mathcal{M}_g$ es representable $\Rightarrow$ decimos que M_g es un espacio de moduli fino.

e.g. $B = M_g$ y pull-back identidad $\mathbb{1} \in \mathrm{Mor}(M_g, M_g)$
$\Rightarrow$ Tenemos familia universal $\mathcal{C} \longrightarrow M_g$.
Dado $f: B \to M_g$ cualquiera, $\exists$
$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathcal{C} \arrow[d] \\ B \arrow[r] & M_g \end{tikzcd}.$$

y dado
$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}' \arrow[r, "\wr"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{D} \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathcal{C} \arrow[d] \\ B \arrow[rr, "\exists! \tilde{f}"'] & & M_g \end{tikzcd}.$$

Tarea: Esto tiende a no funcionar por la existencia de automorfismos de los objetos a ser parametrizados. Nacen los stacks

∘ El reemplazo es representabilidad gruesa (coarse).

Def 1.- $\exists$ $\mathcal{M}_g \xrightarrow{\Psi} \mathrm{Mor}(\_\_, M_g)$ morfismo tal que
1) $\mathcal{M}_g(\mathbb{C}) \xrightarrow{\Psi_{\mathbb{C}}} \mathrm{Mor}(\mathbb{C}, M_g)$ es biyección.
2) Dado otro esquema M_g' y $\mathcal{M}_g \xrightarrow{\Psi'} \mathrm{Mor}(\_\_, M_g')$,

$\exists!\ M_g \xrightarrow{\pi} M'_g$ tal que si $\mathrm{Mor}(-, M_g) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Mor}(-, M'_g)$ satisface $\varphi' = \pi \circ \varphi$.

- Ideas de Mumford según Kollár:

(1) $\exists\ M_g$ moduli grueso y es var. cuasi-proyectiva.

(2) GIT construye estos moduli.

(3) Yoga: $\{C \hookrightarrow \mathbb{P}^{N-1}\} / PGL_N$ (ver abajo)

(4) $\exists\ \overline{M}_g \supset M_g$ (con Deligne) a través de curvas nodales.

(5) Hacer cálculos en $\overline{M}_g$ para conocer más M_g.

- Receta GIT: Tomar variedad X proy, L amplio

(1) fijar el polinomio de Hilbert $\chi(X, L^{\otimes r}) = P(r)$ [invariantes fijos]

(2) Elegir m tq $X \xhookrightarrow{|L^{\otimes m}|} \mathbb{P}$ $\forall$ tales X.

(3) Tomar dentro del corresp. esquema de Hilbert el subesquema corresp. a nuestros objetos $EmB_{P,m} \subset \mathrm{Hilb}(\mathbb{P})$.
(hay que mostrar que de verdad hay tal subesquema)

(4) GIT para la acción PGL $\Rightarrow$ Coarse $M^{GIT}_{P,m} := EmB_{P,m} // PGL$.

(5) Identificar puntos GIT-estables. Se puede en:

- M_g : Mumford 65
- A_g : Mumford 65
- $\overline{M}_g$: Mumford-Gieseker 77/82
- $M_{K^2,\chi}$: Gieseker 1977

$\quad \parallel$

$\star$ Moduli de superficies de tipo general.

¿Qué gracia tiene una compactificación? Varias, una de ellas es que las degeneraciones $\in \overline{M}_g$ son más simples, y sus suavizaciones son las complicadas curvas generales.

Para dim ≥ 2 el solo problema de geografía (ie $M_{K^2,\chi} \neq \phi$) es duro. Una compactificación puede probar existencia!

- Para curvas: $m \geq 3$ sirve siempre y para cada $m \geq 3$ tenemos la misma respuesta. Superficies lo mismo a partir de un m_0.

<u>Teorema</u>: Para variedades proy. suaves X con K_X amplio $\Rightarrow$ (X, K_X) asimp. estable. Así GIT construye el espacio Moduli de <u>modelos canónicos suaves</u>.

- ¿Cómo construir una compactificación? ¿Qué agregamos? ...

(ver próxima charla)