Degenere canónicamente conservando su volumen $= \overline{M}_{K^n, d}$

super 2

22/3/22

KSB II

Recordar:

- Problema de Moduli: fino y grueso
- Receta Mumford: $M_g \subset \overline{M}_g$, $M_{K^2,\chi}$
- Curva estable género $g \geq 2$:

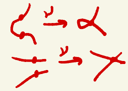
«Curva proyectiva conexa con solo nodos y automorfismos finitos»: $g = h^1(C, \mathcal{O}_C)$ es el género aritmético

Si hay δ nodos y ν componentes

$$\Rightarrow \quad g = \sum_{i=1}^{\nu} g_i + \delta - \nu + 1$$

$\tilde{C} \xrightarrow{\nu} C$

$0 \to \mathcal{O}_C \to \nu_* \mathcal{O}_{\tilde{C}} \to \bigoplus_{i=1}^{\delta} \mathcal{O}_{p_i} \to 0$



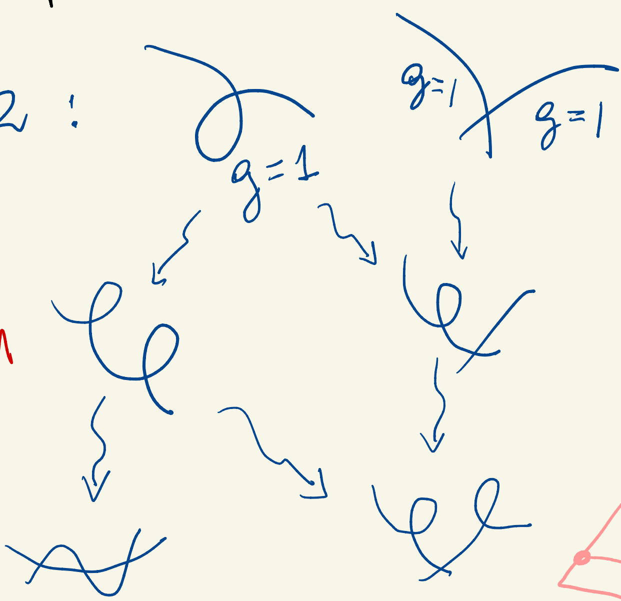
$\nu_* \mathcal{O}_{\tilde{C}}|_p$

$0 \to k[x,y]/(xy) \to k[x] \oplus k[y] \to k \to 0$

$(f(x,0), f(0,y)) \qquad f(0)-g(0)$

Ej 1.- ejemplos.

$g=2$:



Cada nodo de 1 codimension

$3g-3-\delta$

$\nu = 1$

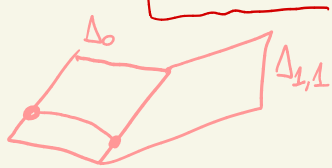
$\Rightarrow g = g_1 + \delta$

$\nu \geq 2$

$\Rightarrow \delta \geq \nu + \sum \delta_i$

$g \geq \sum (g_i + \delta_i) + 1$

$g_i < g$



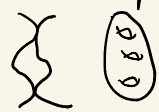
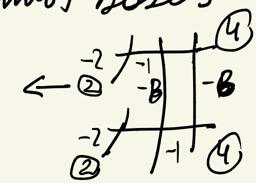
Ej.- reducción estable: No todo degenera estable

$g=3: \quad C_4 \hookrightarrow \mathbb{P}^2$

$\{F_4=0\} = C_4 \rightsquigarrow$  $= \{Q_1Q_2 = 0\}$

$\rightsquigarrow Q_1Q_2 + \lambda F_4$

$\Rightarrow$ Blow-up los $4\times 4 = 16$ puntos bases

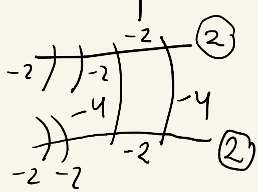
$Bl_{16}(\mathbb{P}^2) = S$  $\longleftarrow$ 

$\downarrow$

$\mathbb{C}$ $\quad 4-8=-4$

nodal

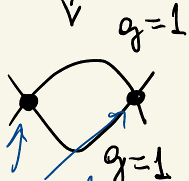
$\uparrow$ ¿?



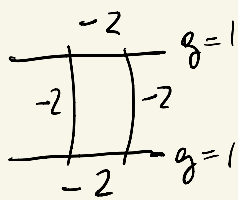
$\uparrow$

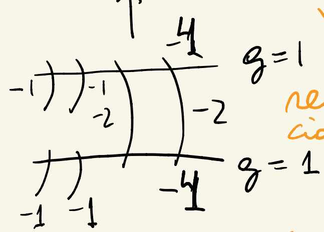
C_4

$\rightsquigarrow$



singular para la superficie

$\longleftarrow$ 

$\longleftarrow$ 

reducida

estabilización

obs 1: Dado que la curva es estable singular $\Rightarrow$ la deformación no es trivial.

Ej.- $\{ZY^2 = X^3 - \lambda Z^3\}$ tienen todas aut $\mathbb{Z}/3$ extra y degenera, pero es isotrivial.

obs 2: Al final del día, después de tener una resolución de la superficie y la curva (nodal y reducida) $\Rightarrow$ se corre el MMP relativo y final es modelo canónico.

Tarea: Conté la vez anterior sobre las curvas
$$\{ y^p = x(x-1)^a(x-\lambda)^b \}$$
las cuales son las curvas $C \curvearrowleft \mathbb{Z}/p$ tal que $C/\mathbb{Z}/p \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ y marcan 4 puntos. Ellos describen curvas en M_g. ¿Cuál es la clausura en $\overline{M}_g$? $(g = p-1)$.

Ahora vamos por $M_{K^2,\chi}$ y compactificación. Un problema para compactificar por GIT es el siguiente.

Teorema (Mumford 1977) X con sing de Mult $> (\dim X+1)!$

(★) $\Rightarrow (X,L)$ nunca es asintóticamente estable.

[ie $[X,L] \in EMB_{p,m}$ no es estable para $m \gg 1$]

Teo [Wang-Xu 14]

por definir

asumir Y^0 canónico

$$\begin{array}{ccc} Y^0 & \subset & Y^{KSB} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^0 & \subset & D \end{array} \quad y \quad \begin{array}{ccc} Y^0 & \subset & Y^{GIT} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^0 & \subset & D \end{array} \quad y \quad Y_0^{GIT} \text{ GIT semi-stable para } \infty\, m$$

$$\Rightarrow Y^{KSB} = Y^{GIT}$$

(★) $\Rightarrow$ Compactificación por GIT depende mucho de m.

Y^{KSB} tienen sing mult > 6 y así no corresp. al límite GIT.

Ejlo $p \in X$ es sing cíclica dim 2

$$\Rightarrow m_p = -\left(\sum \Gamma_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{\ell} (e_i - 2) + 2 .$$

Por ejemplo, si $p \in X$ es sing de Wahl

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\ell} (e_i - 2) = \ell + 1 \quad \text{y así} \quad m_p = \ell + 3 .$$

y existen muchos X^{KSB} que tienen sing de Wahl con mult. $\gg 0$.

Teo [WX14]: $\overline{M}^{GIT}_{K^2,\chi}$ con m-canon. emb $\Rightarrow$ obtenemos una cantidad ∞ de nociones de estabilidad, dependientes de m.

Eso pone fin a GIT compact.!

3. La era KSB.

- Por Mumford dim 2, sabemos que modelos canónicos $\exists$.
- Teoría de Mori, Kawamata, Kollár, Reid, Shokurov (dim 3)
- Hacon McKernan dim ≥ 4; Birkar, Cascini, Corti, Shokurov

Teorema: (Modelos canónicos) X = var. proy suave tipo general

$\Rightarrow$ $X^{can} := \mathrm{Proj}(R(X, \omega_X))$ existe como variedad

y K_X con amplio (global) y sing. canónicas (local).

(global): $\mathbb{Q}$-Cartier y positivo

(local): $f: X \to Y$ con sing can., X suave, bir. $\Rightarrow f_* \mathcal{O}(mK_X) = \mathcal{O}(mK_Y)$ $\forall m$.

[en términos discrep ≥ 0].

Luego compactifican a través de modelos minimales.

Obs.- Originalmente no fue lo hecho por Deligne-Mumford pero es equivalente: Se usó reducción semiestable y luego se contrae lo innecesario. [Mumford]

- **Teorema:** [KSB88]

$$\begin{array}{c} Y^0 \\ \downarrow \\ D^0 \end{array}$$ familia de modelos canónicos

$$\Rightarrow \exists! \quad \begin{array}{ccc} Y^0 & \subset & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^0 & \subset & D \end{array}$$ tal que Y tiene sing. canónicas y ω_Y es amplio para cada fibra.

¿Qué sing. aparecen? Estas son las s.l.c. que cuando Y_0 es normal, entonces son las l.c.

$$\boxed{\begin{array}{l}\textbf{Def.- } \text{Una variedad proy. } X \text{ es } \underline{\text{KSB-estable}} \text{ si:} \\ (1) \ X \text{ tiene solo s.l.c. sing. (local)} \\ (2) \ \omega_X \text{ es amplio (global)}\end{array}}$$

Sorpresa: familias flat no dan buenas familias en moduli.

Teorema [Kollár 2015] $\mathcal{X} \to S$ flat, proy. familia de KSB-estables de dimensión n y S reducida. Son equivalentes:

(1) El volumen de las fibras $s \mapsto (K^n_{X_s})$ es localmente constante.

(2) $s \mapsto h^0(X_s, \omega^{[m]}_{X_s})$ es localmente const. $\forall m$

(3) $\omega^{[m]}_{X_s}$ es flat y conmuta con cambios de base $\forall m$ [$\mathbb{Q}$-Gorenstein]

Parte (3) es usada por Kollár [2008] para definir un buen problema de moduli: functor $\mathcal{M}$.

* **Teorema**: (Moduli de var. estables)
Fijar $n \in \mathbb{N}$ y $d \in \mathbb{Q}$. Entonces el functor $\overline{\mathcal{M}}_{n,d}$ de familias KSB-estables de dimensión d y volumen n posee un proyectivo coarse espacio de móduli $\overline{M}_{n,d}$.

Problema: $\overline{M}_{n,d}$ se conoce muy poco, incluso en dim $= 2$.

Historicamente:

- Mori teoría $\rightsquigarrow$ idea de [KSB88] y demostración $\overline{M}_{2,d}$ es loc. tipo finito y satisface properness. Alexeev muestra que es de tipo finito y así propio. Kollár [Kol90] $\Rightarrow$ proyectivo.

sin boundedness
- Hacon-Xu $\Rightarrow$ MMP ok para este propósito. 2013-2016
- Glueing Kollár 2016.

$\rightsquigarrow$ $\overline{M}_{n,d}$ finite type por [H-McK-X] 2014
$\therefore$ Fujino Kovács-Patakfalvi proyectivo.

Obs.- $\overline{M}_{n,d}$ puede ser arb. horrible, como vimos el semestre pasado (Mnev universalidad)

Problemas: • Describir geometría de $X \in M_{2,d}$ conociendo particulares $X_0 \in \overline{M}_{2,d}$; $X \rightsquigarrow X_0$.
• Describir Moduli completo $\overline{M}_{2,d}$ para d fijo? (puede ser muy muy intenso-imposible)?

Ejemplo concreto: Construcción de superficie KSB estable con singularidades l.c. no canónicas (ie NO ADE), y que vive en la clausura de $M_{K^2,\chi}$ en $\overline{M}_{K^2,\chi}$.

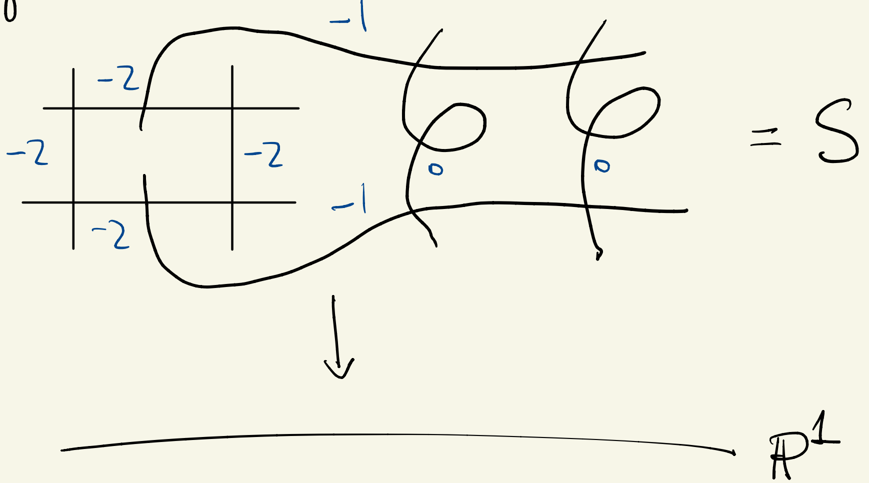
Invariantes: $K^2 = 1$, $p_g = q = 0$, $\pi_1 =$ trivial

ie Godeaux simplemente conexas.

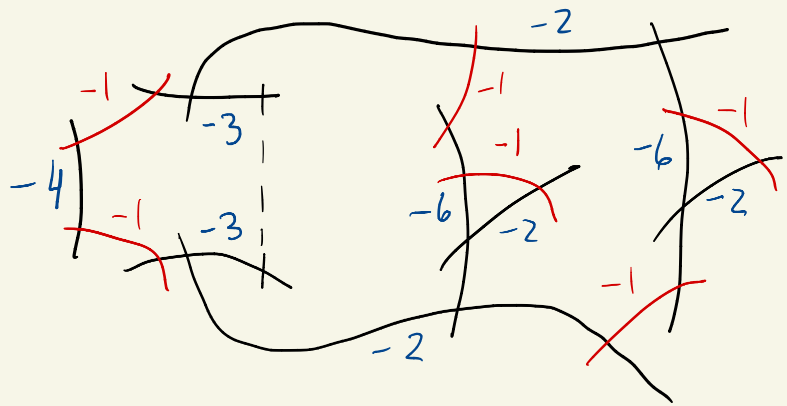
[se conocen las Barlow, Craighero-Gattazzo, Lee-Park y se cree que forman una componente dim = 8 unirracional (ver Schreyer-Stenger) para últimas noticias 2022]

A todo esto, una Godeaux simplecon es homeomorfa a $Bl_8(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$.

Considere una fibración elíptica que tenga:



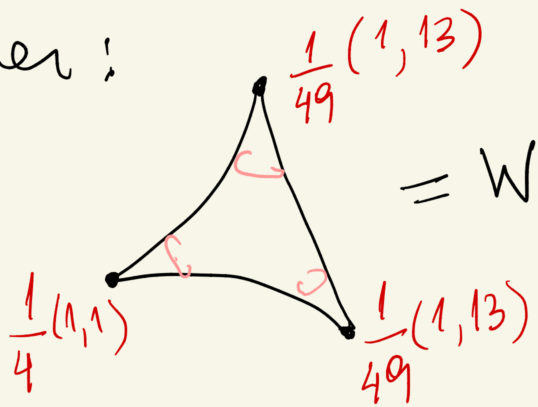
Considere el Blow-up de S :



Ahora contraer las cadenas

$[4]$ $\quad [3,2,6,2]$ $\quad [\overset{5}{3},\overset{3}{2},\overset{1}{6},\overset{2}{2}]$

y obtener :



$= W$

W es KSB estable ya que K_W amplio (elegir bien gluación)

y 3 sings l.c.

Por otro lado (ver paper LP2007) se puede calcular

$$H^2(W, T_W) = 0$$

y así podemos suavizar W abstractamente, eligiendo suavizaciones de sus singularidades.

Para estar en KSB, se eligen los $\mathbb{Q}$-Gorenstein y ellos están ya que son singularidades de Wahl.

$$W \rightsquigarrow W_t = \text{Godeaux simple}/. \text{conexa}$$