SGA 2022-1 (Semana 4): "Moduli de superficies con $K^2 = p_g = 1$" ①

Referencias:
① Bombieri (1973): "Canonical models of surfaces of general type"
② Catanese (1979, 1980): "The moduli and the global period mapping of surfaces with $K^2=p_g=1$"
③ Catanese (1985): "Canonical rings and Special surfaces of general type"
④ Reid (2000): "Graded rings and birational geometry"

Recuerdo: S proy. suave, $\dim_{\mathbb{C}}(S) = 2$ y de tipo general, ie, $K_S = -c_1(T_S)$ es big y nef.

$\boxed{\text{Hoy}}$ Estudiaremos el caso $K^2 = c_1^2(T_S) = 1$ y $p_g \underset{\text{def}}{=} h^0(S, \Omega_S^2) = 1$.

§0. ¿Por qué?

Griffiths (1970): Vale Torelli infinitesimal para superficies con K_S amplio y $\pi_1(S) = \{1\}$?

En dim 1, esto falla para curvas hiperelípticas C, ie, curvas donde la aplicación canónica $\varphi_{|K_C|} : C \longrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ no es un embedding.

Kynef (1977): Torelli infinitesimal falla para $S \simeq \{x_0^6 + \ldots + x_3^6 = 0\}/(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$, donde $K_S^2 = 1$ y $p_g = 1$.

⇝ La filosofía de Bombieri (1973): "superficies tq $\varphi_m : S \dashrightarrow \mathbb{P}H^0(S, mK_S)$ no sea isomorfismo/birracional son especiales".

Más precisamente, Bombieri, Catanese y Miyaoka prueban:

Teorema: S sup. minimal de tipo general con $\pi : S \longrightarrow X := S_{can}$ contracción de las curvas (-2). Entonces,

$$\varphi_m : X \dashrightarrow \Sigma_m \subseteq \mathbb{P}(H^0(X, mK_X))$$

es: ① un isomorfismo si $\begin{cases} m \geq 5 \\ m \geq 4 \quad \text{y} \quad K^2 \geq 2 \\ m \geq 3 \quad \text{y} \quad \begin{cases} K^2 \geq 6 \\ K^2 \geq 3 \quad \text{y} \quad p_g \geq 4 \end{cases} \end{cases}$

② un morfismo regular si $\begin{cases} m \geq 4 \\ m \geq 3 \quad \text{y} \quad \begin{cases} K^2 \geq 3 \\ K^2 \geq 2 \quad \text{y} \quad p_g \geq 1 \end{cases} \\ m \geq 2 \quad \text{y} \quad \begin{cases} K^2 \geq 5 \quad \text{y} \quad p_g \geq 3 \\ q = 0 \quad \text{y} \quad p_g \geq 0 \end{cases} \end{cases}$

③ birracional si $m \geq 3$, excepto si $\begin{cases} K^2 = 2,\ p_g = 3 \quad (m=3) \\ K^2 = 1,\ p_g = 2 \quad (m = 3, 4) \end{cases}$

⇝ Superficies con $K^2 = p_g = 1$ son "especiales" en este sentido!

§1. Los resultados de Catanese (1979, 1980)

Sea S sup. minimal de tipo general con $K^2 = p_g = 1$. Veremos que en tal caso $q \underset{\text{def}}{=} h^0(S, \Omega^1_S) = 0$ y luego $\chi = \chi(S, \mathcal{O}_S) \underset{\text{def}}{=} 1 - q + p_g = 2 \rightsquigarrow [S] \in M_{K^2,\chi} = M_{1,2}$

Teorema (Catanese): $S_{can} \simeq X_{6,6} \subseteq \mathbb{P}(1,2,2,3,3)$ intersección completa. En part, "podemos describir los parámetros", i.e., $M_{1,2} \underset{\text{bir}}{\simeq} \mathbb{P}^{18}$.
Más aún, todas las $[S] \in M_{1,2}$ son difeomorfas y $\pi_1(S) = \{1\}$.

Aquí, $\mathbb{P}(1,2,2,3,3)$ es un espacio proyectivo con pesos (WPS):

Sea $\underline{w} = (w_0, \ldots, w_n) \in \mathbb{N}^{n+1}_{\geq 1}$, y definimos $\mathbb{P}(\underline{w}) := (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$
donde $(x_0, \ldots, x_n) \sim (\lambda^{w_0} x_0, \ldots, \lambda^{w_n} x_n) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^*$.

Propiedades importantes:

0) $\mathbb{P}(\underline{w}) \simeq \operatorname{Proj}(\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n])$ con $\deg(x_i) = w_i$.

1) Dolgachev (1982): Podemos asumir $\gcd(w_0, \ldots, w_n) = 1$ y que cada subconj. de n pesos w_i no poseen factores comunes ("$\mathbb{P}(\underline{w})$ bien formado").
Eg. $\mathbb{P}(1,2,2,3,3)$ bien formado.

2) Mori (1975): Sea $m := \operatorname{lcm}(w_0, \ldots, w_n) \Rightarrow \operatorname{Sing}(\mathbb{P}(\underline{w})) = \bigcup_{\substack{p \mid m \\ p \text{ primo}}} S_p$
donde $S_p = V(\{x_i \text{ tales que } p \nmid w_i\})$.
Eg. $\operatorname{Sing}(\mathbb{P}(1,2,2,3,3)) = S_2 \cup S_3 = \{[0,a,b,0,0]\} \cup \{[0,0,0,c,d]\} \simeq \mathbb{P}^1 \sqcup \mathbb{P}^1$

Además, si $X_{d_1,\ldots,d_r} \subseteq \mathbb{P}(\underline{w})$ int. completa $\Rightarrow \omega_X \simeq \mathcal{O}_X\left(\sum_{i=1}^{r} d_i - \sum_{j=0}^{n} w_j\right)$ $\mathbb{Q}$-l.b.
Eg. si $X = X_{6,6} \subseteq \mathbb{P}(1,2,2,3,3)$ int. completa $\Rightarrow \omega_X \simeq \mathcal{O}_X(1)$.

3) Kasprzyk (2013): Sea $|w| = w_0 + \ldots + w_n$, entonces $\mathbb{P}(\underline{w})$ tiene singularidades $\left\{\begin{matrix}\text{canónicas} \\ \text{terminales}\end{matrix}\right\}$ ssi $f(\ell) := \sum_{j=0}^{n} \left\{\frac{w_j \ell}{|w|}\right\} \in \left\{\begin{matrix}\{1, \ldots, n-1\} \\ \{2, \ldots, n-1\}\end{matrix}\right\} \quad \forall \ell \in \{2, \ldots, |w|-2\}$

Eg. $\mathbb{P}(1,2,2,3,3)$ tiene sing Terminales $\overset{\text{Bertini}}{\Rightarrow} X_{6,6} \subseteq \mathbb{P}(1,2,2,3,3)$ suave si los coeficientes son generales $\rightsquigarrow \exists\, M_a \subseteq M_{1,2}$ abierto de sup. con K_S amplio.

§2. Un poco de álgebra (cf. Reid 2000):

Sea $R = \bigoplus_{m \geq 0} R_m$ una $\mathbb{C}$-álgebra graduada, $R_0 \simeq \mathbb{C}$, finitamente generada por $f_0 \in R_{w_0}, \ldots, f_n \in R_{w_n}$. Entonces, la serie de Hilbert $H(t) := \sum_{m \geq 0} \dim_{\mathbb{C}}(R_m) t^m$ verifica

$$H(t) = \frac{P(t)}{(1-t^{w_0}) \cdots (1-t^{w_n})}$$

donde $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$ "numerador de Hilbert" (depende de $f_0, \ldots, f_n$).

<u>Idea</u> (Mumford, Reid): Considerar $R(S) = \bigoplus_{m\geq 0} H^0(S, mK_S)$ y usar la serie de Hilbert para "adivinar" ecuaciones para $S_{can} \simeq \mathrm{Proj}(R(S))$ en algún $\mathbb{P}(\underline{w})$.

<u>Propiedades importantes</u>:

1) Ciliberto (1983): $R(S)$ está generado por elem. homogéneos de grado ≤ 5 (resp. ≤ 6) si $p_g \geq 1$ (resp. si $p_g = 0$).

2) Goto - Watanabe (1978): $R(S)$ es un anillo <u>Gorenstein</u> si $q(S) = 0$.

Notemos que

$$P_m \underset{dy}{=} h^0(S, mK_S) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0 \\ p_g & \text{si } m = 1 \\ \binom{m}{2}K^2 + \chi & \text{si } m \geq 2 \quad (\text{RR} + \text{Kawamata-Viehweg}) \end{cases}$$

con $P_m = 1 + p_g + \frac{m(m-1)}{2}K^2$ si $q = 0$ $(m \geq 2)$ $\rightsquigarrow P_m = O(m^2)$ tipo general !

$$\underset{q=0}{\Longrightarrow} H(t) = 1 + p_g t + (p_g + 1 + K^2)t^2 + \ldots + \left(p_g + 1 + \binom{m}{2}K^2\right)t^m + \ldots$$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Calcular $(1-t)H(t)$, $(1-t)^2H(t)$, $(1-t)^3H(t)$ y deducir que

$$H(t) = \frac{1 + (p_g - 3)t + (K^2 - 2p_g + 4)t^2 + (p_g - 3)t^3 + t^4}{(1-t)^3} = \frac{P_0(t)}{(1-t)^3}$$

donde $P_0(t)$ es "simétrico" (Gorenstein).

<u>Ejemplos</u>: Sup. que $q = 0$ y que:

① $K^2 = 2$ y $p_g = 3$ $\quad (\Rightarrow K^2 = 2p_g - 4$ Horikawa !$)$

$$H(t) = \frac{1+t^4}{(1-t)^3} \cdot \frac{(1-t^4)}{(1-t^4)} = \frac{1-t^8}{(1-t)^3(1-t^4)} \rightsquigarrow S_{can} \underset{?}{\cong} X_8 \subseteq \mathbb{P}(1,1,1,4)$$

<u>Horikawa</u> (1976): $\varphi_1 : S_{can} \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^2$ ramificado en $C = \{f_8 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^2$

$\Rightarrow S_{can} \simeq X_8 = \{z^2 - f_8(x_0, x_1, x_2) = 0\} \subseteq \mathbb{P}(1,1,1,4)$ ✓

② <u>Reid</u> (1978): El cubrimiento universal de una sup. de Godeaux X (i.e. $p_g = 0$, $K^2 = 1$) con $\pi_1(X) \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ es S tq $K^2 = 4$ y $p_g = 3$ $\underset{\text{Hilbert}}{\rightsquigarrow} S \simeq X_{4,4} \subseteq \mathbb{P}(1,1,1,2,2)$ $\circlearrowleft \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

$\boxed{\text{Pregunta}}$ $K^2 = 1$, $p_g = 0$ con $\pi_1 = \{1\}$? $S_{can} \hookrightarrow \mathbb{P}(2^2, 3^4, 4^4, 5^3)$ codim 10 !
(cf. arXiv 2009.05357 por Schreyer - Stenger) $\quad$ sing. terminales

③ $K^2 = p_g = 1$:

$$H(t) = \frac{(t^2-t+1)^2}{(1-t)^3} \cdot \frac{(1-t^2)^2}{(1-t^2)^2} = \frac{(t^2-t+1)^2(1+t)^2}{(1-t)(1-t^2)^2} = \frac{(1+t^3)^2}{(1-t)(1-t^2)^2} \cdot \frac{(1-t^3)^2}{(1-t^3)^2}$$

$$= \frac{(1-t^6)^2}{(1-t)(1-t^2)^2(1-t^3)^2} \rightsquigarrow S_{can} \underset{?}{\cong} X_{6,6} \subseteq \mathbb{P}(1,2,2,3,3)$$

<u>Catanese</u> (79,80): Sí !

§3. Superficies con $K^2 = p_g = 1$:

Bombieri (1973): $K^2 = 1 \Rightarrow q = 0$ (pues $q \geq 1 \Rightarrow \chi \leq \frac{1}{2}K^2$)

Si además $p_g = 0 \Rightarrow \mathrm{Tors}\, H_1(S,\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Tors}\, H^2(S,\mathbb{Z}) = 0$.

Así, $\chi = 1 - q + p_g = 2$ y $[S] \in M_{K^2,\chi} = M_{1,2}$ (con $e(S) = 23$)

$\Rightarrow P_m = \frac{1}{2}m(m-1) + 2 \quad (m \geq 2)$

Analicemos el anillo canónico $R(S) = \bigoplus_{m \geq 0} H^0(S, mK_S)$:

$R_1 \cong \mathbb{C} \rightsquigarrow \{s_0\}$ generador

$s_0^2 \in R_2 \simeq \mathbb{C}^3 \rightsquigarrow \{s_0^2, s_1, s_2\}$ generadores

$s_0^3, s_0 s_1, s_0 s_2 \in R_3 \simeq \mathbb{C}^5 \rightsquigarrow \{s_0^3, s_0 s_1, s_0 s_2, s_3, s_4\}$ generadores

Más aún : $\mathbb{C}^8 \simeq R_4 = s_0 \cdot R_3 \oplus \mathbb{C} s_1^2 \oplus \mathbb{C} s_1 s_2 \oplus \mathbb{C} s_2^2$

$\rightsquigarrow R(S) = \langle s_0, s_1, s_2, s_3, s_4 \rangle$ $\mathbb{C}$-álg

deg 1 2 2 3 3

Consideremos $T := \mathbb{C}[x_0, y_1, y_2, z_3, z_4]$ y $\alpha^* : T \longrightarrow R(S)$ con $I := \ker(\alpha^*)$

deg 1 2 2 3 3

$x_0 \mapsto s_0$

$y_i \mapsto s_i \quad (i = 1,2)$

$z_i \mapsto s_i \quad (i = 3,4)$

$\Rightarrow \alpha : S_{can} \simeq \mathrm{Proj}(R(S)) \longrightarrow \mathrm{Proj}(T) \simeq \mathbb{P}(1,2,2,3,3)$.

Como $\dim_{\mathbb{C}} T_6 = 19$ (Ejercicio) y $\dim_{\mathbb{C}} R_6 \underset{\text{def}}{=} P_6 = 17 \rightsquigarrow \exists\, f, g \in I_6$ l.i.

Se calcula : f, g irred y $\alpha(S_{can}) = \{f = g = 0\} \subseteq \mathbb{P}(1,2,2,3,3) \setminus \mathrm{Sing}(\mathbb{P}(\underline{w}))$

$\Rightarrow T/\langle f, g\rangle \simeq R(S)$, ie, $S_{can} \simeq X_{6,6} \subseteq \mathbb{P}(1,2,2,3,3)$ ✓

Obs clave : si escribimos $y_0 := x_0^2$ entonces, modulo $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}(1,2,2,3,3))$, se tiene :

$$S_{can} \simeq \begin{cases} f = z_3^2 + x_0 z_4\, a(y) + F(y) = 0 \\ g = z_4^2 + x_0 z_3\, b(y) + G(y) = 0 \end{cases}$$

donde a, b (resp. F, G) son pol. de grado 1 (resp. 3) en $y = (y_0, y_1, y_2)$.

Consecuencias : De lo anterior, se deduce :

① $M_{1,2} \simeq$ abierto de $\mathbb{P}^{18}$ (¡coeficientes!) $\underset{\text{bir}}{\sim} \mathbb{P}^{18}$

② (Bertini, Mori) : $\exists\, M_a \subsetneq M_{1,2}$ abierto con $[S] \in M_a$ suave tq K_S amplio

$\Downarrow$

③ (Ehresmann, Tyurina): Todas las $[S] \in M_{1,2}$ son difeomorfas ✓

Obs final : $\varphi_2 : S_{can} \longrightarrow \mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(R_2)$ es un morfismo de grado $(2K)^2 = 4$

(si $s_0(p) = s_1(p) = s_2(p) = 0 \Rightarrow p$ punto base de φ_4 ¡Bombieri!)

Mejor aún : si $a \equiv b \equiv 0 \rightsquigarrow S_{can} \simeq \begin{Bmatrix} z_3^2 = F(y) \\ z_4^2 = G(y) \end{Bmatrix} \rightsquigarrow S_{can} \xrightarrow{4:1} \mathbb{P}^2$

cubr. de galois con $G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$

$\rightsquigarrow \pi_1(S)$ subgrupo de $G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \xRightarrow[\mathrm{Tors}\, H_1(S,\mathbb{Z}) = 0]{} \pi_1(S) = \{1\}$ ✓

abeliano finito