Algunos problemas sobre moduli de superficies de tipo general

1 Preguntas

Trabajaremos con S una superficie proyectiva l suave de tipo general (K_S amplio). Como es usual fijamos la notación de los invariantes

- $c_1^2 = K^2 > 0$ la primera clase de Chern.
- $c_2 = \chi_{top} = \sum_{i=0}^4 b_i$ la segunda clase de Chern, igual a la característica de Euler topológica.
- $p_g = h^0(K) = h^2(\mathcal{O}_S)$ el género geométrico.
- $q = h^0(\Omega_S^1) = h^1(\mathcal{O}_S)$ la irregularidad.
- $\chi = 1 - q + p_g$ la característica de Euler algebraica.
- π el grupo fundamental.

Y recordamos la relación fundamental dada por la *Fómula de Noether*

$$K^2 + \chi_{top} = 12 \cdot \chi.$$

Enfocaremos nuestra atención en los dos problemas siguientes relacionados al estudio de los espacios de moduli $\mathcal{M}_{(K^2,\chi)}$ introducidos por Gieseker:

1. ¿Cuántas componentes irreducibles tiene $\mathcal{M}_{(K^2,\chi)}$? componentes conexas? sus dimensiones? sus relaciones de incidencia? podemos describir dichas componentes?
2. ¿Cómo se distribuyen las superficies Picard maximales en $\mathcal{M}_{(K^2,\chi)}$?

Definición. Decimos que una superficie suave proyectiva S es *Picard maximal* si $\rho(S) = h^{1,1}(S) = h^1(\Omega_S^1)$.

Observación. Por el Teorema (1,1) de Lefschetz sabemos que

$$\rho(S) = \text{rank } H^{1,1}(S) \cap H^2(S, \mathbb{Z}) \leq \dim_{\mathbb{C}} H^{1,1}(S) = h^{1,1}(S).$$

Observación. Si dos superficies S_1 y S_2 están en la misma componente conexa de $\mathcal{M}_{(K^2,\chi)}$, entonces $S_1 \xrightarrow[diff]{\sim} S_2$ (son difeomorfas) ya que al conectarlas por un camino producimos una familia topológicamente localmente trivial a un parámetro (real). En particular, todos sus invariantes topológicos son iguales (ej. π_1, b_i) y por ende también p_g y q (en general los números de Hodge $h^{p,q}$ son invariantes por deformación). Luego todos los invariantes anteriores distinguen componentes conexas. Luego, la pregunta interesante es saber si dichos invariantes determinan cada componente conexa. Por el celebrado teorema de Freedman [Fre82] sabemos que en ciertos casos el tipo topológico de S queda determinado por $\pi_1(S)$ y $H^2(S, \mathbb{Z})$ (con su producto de intersección), lo que nos lleva a preguntarnos si en general $S_1 \xrightarrow[diff]{\sim} S_2$ implica que S_1 y S_2 están en la misma componente conexa. Este problema se conoce como la conjetura DEF = DIFF, que fué refutado por Manetti [Man01] y posteriormente por Catanese [Cat03]. En general se sabe que tanto la cantidad de componentes conexas de $\mathcal{M}_{(K^2,\chi)}$ como sus dimensiones pueden ser tan grandes como se quiera, y que este fenómeno es *sparse* en la geografía de superficies de tipo general [Cat84, Man94, Man01, Cat03].

Existen resultados sobre clasificación de superficies de tipo general principalmente en 3 valores diferentes de $p_g = 0, 1, 4$:

$\underline{p_g = 4}$: En este caso sabemos por la desigualdad de Noether que $K^2 \geq 2p_g - 4 = 4$. Por otro lado si $q > 0$ tenemos más aún que $K^2 \geq 2p_g = 8$. Luego para $4 \leq K^2 \leq 7$ tenemos que $q = 0$. Es en estos casos que hay teoremas de clasificación basados en el análisis del mapa canónico $\varphi_K : S - - \to \mathbb{P}^3$.

- $\underline{K^2 = 4}$: ([Noe75, Hor76]) En este caso el moduli es irreducible y corresponde a superficies tales que el mapa canónico es libre de puntos de base y determina un cubrimiento doble de una cuádrica en $\mathbb{P}^3$.

- $\underline{K^2 = 5}$: ([Enr49, Hor73]) En este caso el moduli es conexo y tiene 2 componentes irreducibles de dimensión 39, $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ que se intersectan a lo largo de un divisor, donde $\mathcal{M}_1$ corresponde a las superficies quínticas en $\mathbb{P}^3$ con a lo más puntos dobles racionales, mientras que $\mathcal{M}_2$ corresponde a cubrimientos dobles de una cuádrica en $\mathbb{P}^3$ (dado por el sistema canónico, el cual tiene un único punto de base).

- $\underline{K^2 = 6}$: ([Enr49, Hor78, BCP06]) El moduli tiene 4 componentes irreducibles de dimensiones 38, 38, 38 y 39 y a lo más 2 componentes conexas. Todas las superficies de este tipo son simplemente conexas. Aún no se sabe si este moduli es conexo o no.

- $\underline{K^2 = 7}$: ([Bau01]) El moduli tiene 3 componentes irreducibles de dimensiones 36, 36 y 38 y a lo más 2 componentes conexas. Aún no se sabe si este moduli es conexo o no.

Existen más resultados parciales para otros invariantes que omitiremos por el momento. Enfocaremos el resto de la charla a los casos $p_g = 0$ y $p_g = 1$.

2 Superficies con $p_g = 0$

Como $\chi > 0$, sigue que $q = 0$ y $1 \leq K^2 \leq 9$. En estos espacios de moduli es muy difícil tener teoremas de clasificación ya que no contamos con el mapa canónico. De hecho tan sólo probar existencia de estas superficies con invariantes fijos es un gran desafío. Hay varios resultados sobre la clasificación de los posibles grupos fundamentales realizables por estas superficies, pero en general los espacios de moduli están lejos de ser bien entendidos. Repasemos parte de lo que se conoce:

- $\underline{K^2 = 9}$: ([Yau77, Miy82, PY07, CS10]) Estos son los llamados *fake projective planes*. Cada superficies S de este tipo es el cociente de la bola $\mathbb{B}_2 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 < 1\}$ por la acción de un subgrupo aritmético $\Gamma < \mathrm{SU}(2,1)$. Luego son todas rígidas. El moduli consta de 100 puntos dados en 50 parejas conjugadas.

- $\underline{K^2 = 8}$: ([BCG08]) Para superficies S admitiendo un cubrimiento étalé finito reducible (i.e. de la forma $C_1 \times C_2$) el moduli tiene exactamente 18 componentes conexas irreducibles. Además se conocen otros puntos aislados del moduli. Se conjetura que el recubrimiento universal de estas superficies siempre es el bidisco $\mathbb{D} \times \mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}^2$.

- $\underline{K^2 = 1}$: ([Rei78]) Estas son las llamadas *numerical Godeaux surfaces*. Se sabe que los grupos fundamentales realizables son $\mathbb{Z}/n$ para $n = 1, \ldots, 5$, y que para $n \geq 3$ cada moduli con dicho grupo fundamental es conexo e irreducible. Se conjetura que lo mismo vale para $n = 1, 2$.

- $\underline{K^2 = 2}$: ([BCP11]) Estas son las llamadas *numerical Campedelli surfaces*. Se conocen 13 tipos diferentes de grupos fundamentales algebraicos para estas superficies. Se conjetura que todos los grupos fundamentales realizables son los grupos finitos de orden ≤ 9 salvo D_4 y D_3.

- $\underline{K^2 \geq 3}$: ([BCP11]) En cada caso se conocen muchos tipos diferentes de grupos fundamentales realizables. Se conjetura que para $K^2 \leq 3$ siempre el grupo fundamental es finito, mientras que para $K^2 \geq 7$ es siempre infinito. En los casos intermedios se conocen ejemplos de ambos tipos.

Otro punto de vista: En todos los casos anteriores el análisis se ha enfocado en el estudio del grupo fundamental. Siguiendo la filosofía de [Fre82] es natural querer considerar el invariante dado por $H^2(S, \mathbb{Z}) = \mathrm{Pic}(S)$ (como reticulado, i.e. con su producto). Esto sigue directamente de la secuencia exponencial pues $q = h^1(\mathcal{O}_S) = 0$ y $p_g = h^2(\mathcal{O}_S) = 0$. Sin embargo, tan sólo construir un ejemplo de superficie de tipo general con $p_g = 0$ es un problema difícil, por lo que no hay mucho conocimiento al respecto de sus posibles grupos de Picard.

Después del célebre trabajo de Lee y Park [LP07], se ha explotado el método para probar existencia de superficies de tipo general con ciertos invariantes fijos por medio de suavizaciones $\mathbb{Q}$-Gorenstein de W-superficies S_0 en el borde de la compactificación KSBA de $\mathcal{M}_{(K^2,\chi)}$. Luego, dadas dos W-superficies S_0 y S_0' en el borde de $\mathcal{M}_{(K^2,\chi)}$, es natural preguntarse ¿cuándo sus suavizaciones $\mathbb{Q}$-Gorenstein $\{S_t\}_{t \in \mathbb{D}^\times}$ y $\{S_t'\}_{t \in \mathbb{D}^\times}$ viven en la misma componente conexa de $\mathcal{M}_{(K^2,\chi)}$? Sabemos que si $\mathrm{Pic}(S_t) \not\simeq \mathrm{Pic}(S_t')$ entonces ellas no tiene el mismo topológico y por ende no están en la misma componente conexa. Lo que nos lleva a la siguiente pregunta: ¿Podemos calcular $\mathrm{Pic}(S_t)$ a partir de S_0? Resultados recientes de G. Urzúa apuntan hacia una respuesta afirmativa en $p_g = 0$. En efecto, si denotamos $S \to \mathbb{D}$ a la degeneración $\mathbb{Q}$-Gorenstein, entonces S admite un retracto por deformación a S_0, luego tomando la secuencia larga en homología del par (S, S_t) tenemos

$$\cdots \to H_2(S_t) = \mathrm{Pic}(S_t) \xrightarrow{sp} H_2(S_0) = \mathrm{Cl}(S_0) \xrightarrow{f} H_2(S, S_t) \to \cdots$$

Bajo las condiciones de la degeneración considerada es posible mostrar que el *mapa de especialización sp* es inyectivo. El reticulado

$$sp(\mathrm{Pic}(S_t)) \subseteq \mathrm{Cl}(S_0)$$

es el llamado *reticulado de Coble-Mukai de* S_0 y corresponde justamente a las clases que son límite de ciclos algebraicos de S_t (por un resultado de Kawamata [Kaw92] se sabe que para este tipo de degeneraciones no hay monodromía en torno a $\mathbb{D}^{\times}$) al tomar $t \to 0$. Lo destacable del trabajo de Urzúa es que dicho reticulado es efectivamente calculable a partir de los divisores que surgen al tomar la resolución minimal de S_0, puesto que podemos dar una descripción explícita del mapa f y calcular su kernel. Este invariante aún no ha sido usado para distinguir componentes conexas diferentes de $\mathcal{M}_{(K^2,\chi)}$, podría ser interesante intentar abordar el fenómeno de los agujeros de gusanos [UV21, RU21].

3 Superficies con $p_g = 1$

References

[Bau01] Ingrid C Bauer. *Surfaces with $K^2 = 7$ and $p_g = 4$*. Number 152. American Mathematical Soc., 2001.

[BCG08] Ingrid Bauer, Fabrizio Catanese, and F Grunewald. The classification of surfaces with $p_g = q = 0$ isogenous to a product of curves. *Pure and Applied Mathematics Quarterly*, 4(2):547–586, 2008.

[BCP06] Ingrid C Bauer, Fabrizio Catanese, and Roberto Pignatelli. The moduli space of surfaces with $k^2 = 6$ and $p_g = 4$. *Mathematische Annalen*, 2(336):421–438, 2006.

[BCP11] Ingrid Bauer, Fabrizio Catanese, and Roberto Pignatelli. Surfaces of general type with geometric genus zero: a survey. In *Complex and differential geometry*, pages 1–48. Springer, 2011.

[Cat84] F Catanese. On the moduli spaces of surfaces of general type. *Journal of Differential Geometry*, 19(2):483–515, 1984.

[Cat03] Fabrizio Catanese. Moduli spaces of surfaces and real structures. *Annals of mathematics*, pages 577–592, 2003.

[CS10] Donald I Cartwright and Tim Steger. Enumeration of the 50 fake projective planes. *Comptes Rendus Mathematique*, 348(1-2):11–13, 2010.

[Enr49] Federigo Enriques. *Le superficie algebriche*. N. Zanichelli, 1949.

[Fre82] Michael Hartley Freedman. The topology of four-dimensional manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 17(3):357–453, 1982.

[Hor73] Eiji Horikawa. On deformations of quintic surfaces. *Proceedings of the Japan Academy*, 49(6):377–379, 1973.

[Hor76] Eiji Horikawa. Algebraic surfaces of general type with small c_1^2, I. *Annals of Mathematics*, pages 357–387, 1976.

[Hor78] Eiji Horikawa. Algebraic surfaces of general type with small c_1^2, III. *Inventiones mathematicae*, 47(3):209–248, 1978.

[Kaw92] Yujiro Kawamata. Moderate degenerations of algebraic surfaces. In *Complex Algebraic Varieties*, pages 113–132. Springer, 1992.

[LP07] Yongnam Lee and Jongil Park. A simply connected surface of general type with pg= 0 and k 2= 2. *Inventiones mathematicae*, 170(3):483–505, 2007.

[Man94] Marco Manetti. On some components of moduli space of surfaces of general type. *Compositio Mathematica*, 92(3):285–297, 1994.

[Man01] Marco Manetti. On the moduli space of diffeomorphic algebraic surfaces. *Inventiones mathematicae*, 143(1):29–76, 2001.

[Miy82] Yoichi Miyaoka. Algebraic surfaces with positive indices. In *Proc. Symp. Katata/-Jap*, pages 281–301, 1982.

[Noe75] Max Noether. Zur theorie des eindeutigen entsprechens algebraischer gebilde. *Mathematische Annalen*, 8(4):495–533, 1875.

[PY07] Gopal Prasad and Sai-Kee Yeung. Fake projective planes. *Inventiones mathematicae*, 168(2):321–370, 2007.

[Rei78] M Reid. Surfaces with $p_g = 0$, $k^2 = 1$. *Sci. Univ. Tokyo Sect. A*, 1:25, 1978.

[RU21] Javier Reyes and Giancarlo Urzúa. Rational configurations in k3 surfaces and simply-connected $p_g = 1$ surfaces for $k^2 = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. *arXiv preprint arXiv:2110.10629*, 2021.

[UV21] Giancarlo Urzúa and Nicolás Vilches. On wormholes in the moduli space of surfaces. *arXiv preprint arXiv:2102.02177*, 2021.

[Yau77] Shing-Tung Yau. Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 74(5):1798–1799, 1977.