# Algunos problemas sobre moduli de superficies de tipo general

Roberto Villaflor

## 1 Preguntas

Trabajaremos con $S$ una superficie proyectiva suave de tipo general ($K_S$ amplio). Como es usual fijamos la notación de los invariantes

- $c_1^2 = K^2 > 0$ la primera clase de Chern.
- $c_2 = \chi_{top} = \sum_{i=0}^4 b_i$ la segunda clase de Chern, igual a la característica de Euler topológica.
- $p_g = h^0(K) = h^2(\mathcal{O}_S)$ el género geométrico.
- $q = h^0(\Omega_S^1) = h^1(\mathcal{O}_S)$ la irregularidad.
- $\chi = 1 - q + p_g$ la característica de Euler algebraica.
- $\pi_1$ el grupo fundamental.

Y recordamos la relación fundamental dada por la *Fórmula de Noether*

$$K^2 + \chi_{top} = 12 \cdot \chi.$$

Enfocaremos nuestra atención en los dos problemas siguientes relacionados al estudio de los espacios de moduli $\mathcal{M}_{(K^2,\chi)}$ introducidos por Gieseker:

1. ¿Cuántas componentes irreducibles tiene $\mathcal{M}_{(K^2,\chi)}$? componentes conexas? sus dimensiones? sus relaciones de incidencia? podemos describir dichas componentes?
2. ¿Cómo se distribuyen las superficies Picard maximales en $\mathcal{M}_{(K^2,\chi)}$?

**Definición.** Decimos que una superficie suave proyectiva $S$ es *Picard maximal* si $\rho(S) = h^{1,1}(S) = h^1(\Omega_S^1)$.

**Observación.** Por el Teorema (1,1) de Lefschetz sabemos que

$$\rho(S) = \operatorname{rank} H^{1,1}(S) \cap H^2(S,\mathbb{Z}) \leq \dim_{\mathbb{C}} H^{1,1}(S) = h^{1,1}(S).$$

**Observación.** Si dos superficies $S_1$ y $S_2$ están en la misma componente conexa de $\mathcal{M}_{(K^2,\chi)}$, entonces $S_1 \xrightarrow[diff]{\sim} S_2$ (son difeomorfas) ya que al conectarlas por un camino producimos una familia topológicamente localmente trivial a un parámetro (real). En particular, todos sus invariantes topológicos son iguales (ej. $\pi_1$, $b_i$) y por ende también $p_g$ y $q$ (en general los números de Hodge $h^{p,q}$ son invariantes por deformación). Luego todos los invariantes anteriores distinguen componentes conexas. Luego, la pregunta interesante es saber si dichos invariantes determinan cada componente conexa. Por el celebrado teorema de Freedman [Fre82] sabemos que en ciertos casos el tipo topológico de $S$ queda determinado por $\pi_1(S)$ y $H^2(S,\mathbb{Z})$ (con su producto de intersección), lo que nos lleva a preguntarnos si en general $S_1 \xrightarrow[diff]{\sim} S_2$ implica que $S_1$ y $S_2$ están en la misma componente conexa. Este problema se conoce como la conjetura DEF = DIFF, que fue refutada por Manetti [Man01] y posteriormente por Catanese [Cat03]. En general se sabe que tanto la cantidad de componentes conexas de $\mathcal{M}_{(K^2,\chi)}$ como sus dimensiones pueden ser tan grandes como se quiera, y que este fenómeno es *sparse* en la geografía de superficies de tipo general [Cat84, Man94, Man01, Cat03].

Existen resultados sobre clasificación de superficies de tipo general principalmente en 3 valores diferentes de $p_g = 0, 1, 4$:

$\underline{p_g = 4}$: En este caso sabemos por la desigualdad de Noether que $K^2 \geq 2p_g - 4 = 4$. Por otro lado si $q > 0$ tenemos más aún que $K^2 \geq 2p_g = 8$. Luego para $4 \leq K^2 \leq 7$ tenemos que $q = 0$. Es en estos casos que hay teoremas de clasificación basados en el análisis del mapa canónico $\varphi_K : S \dashrightarrow \mathbb{P}^3$.

- $\underline{K^2 = 4}$: ([Noe75, Hor76]) En este caso el moduli es irreducible y corresponde a superficies tales que el mapa canónico es libre de puntos de base y determina un cubrimiento doble de una cuádrica en $\mathbb{P}^3$.

- $\underline{K^2 = 5}$: ([Enr49, Hor73]) En este caso el moduli es conexo y tiene 2 componentes irreducibles de dimensión 39, $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ que se intersectan a lo largo de un divisor, donde $\mathcal{M}_1$ corresponde a las superficies quínticas en $\mathbb{P}^3$ con a lo más puntos dobles racionales, mientras que $\mathcal{M}_2$ corresponde a cubrimientos dobles de una cuádrica en $\mathbb{P}^3$ (dado por el sistema canónico, el cual tiene un único punto de base).

- $\underline{K^2 = 6}$: ([Enr49, Hor78, BCP06]) El moduli tiene 4 componentes irreducibles de dimensiones 38, 38, 38 y 39 y a lo más 2 componentes conexas. Todas las superficies de este tipo son simplemente conexas. Aún no se sabe si este moduli es conexo o no.

- $\underline{K^2 = 7}$: ([Bau01]) El moduli tiene 3 componentes irreducibles de dimensiones 36, 36 y 38 y a lo más 2 componentes conexas. Aún no se sabe si este moduli es conexo o no.

Existen más resultados parciales para otros invariantes que omitiremos por el momento. Enfocaremos el resto de la charla a los casos $p_g = 0$ y $p_g = 1$.

## 2 Superficies con $p_g = 0$

Como $\chi > 0$, sigue que $q = 0$ y $1 \leq K^2 \leq 9$. En estos espacios de moduli es muy difícil tener teoremas de clasificación ya que no contamos con el mapa canónico. De hecho tan sólo probar existencia de estas superficies con invariantes fijos es un gran desafío. Hay varios resultados sobre la clasificación de los posibles grupos fundamentales realizables por estas superficies, pero en general los espacios de moduli están lejos de ser bien entendidos. Repasemos parte de lo que se conoce:

- $\underline{K^2 = 9}$: ([Yau77, Miy82, PY07, CS10]) Estos son los llamados *fake projective planes*. Cada superficies $S$ de este tipo es el cociente de la bola $\mathbb{B}_2 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 < 1\}$ por la acción de un subgrupo aritmético $\Gamma < \mathrm{SU}(2,1)$. Luego son todas rígidas. El moduli consta de 100 puntos dados en 50 parejas conjugadas.

- $\underline{K^2 = 8}$: ([BCG08]) Para superficies $S$ admitiendo un cubrimiento étalé finito reducible (i.e. de la forma $C_1 \times C_2$) el moduli tiene exactamente 18 componentes conexas irreducibles. Además se conocen otros puntos aislados del moduli. Se conjetura que el recubrimiento universal de estas superficies siempre es el bidisco $\mathbb{D} \times \mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}^2$.

- $\underline{K^2 = 1}$: ([Rei78]) Estas son las llamadas *numerical Godeaux surfaces*. Se sabe que los grupos fundamentales realizables son $\mathbb{Z}/n$ para $n = 1, \ldots, 5$, y que para $n \geq 3$ cada moduli con dicho grupo fundamental es conexo e irreducible. Se conjetura que lo mismo vale para $n = 1, 2$.

- $\underline{K^2 = 2}$: ([BCP11]) Estas son las llamadas *numerical Campedelli surfaces*. Se conocen 13 tipos diferentes de grupos fundamentales algebraicos para estas superficies. Se conjetura que todos los grupos fundamentales realizables son los grupos finitos de orden $\leq 9$ salvo $D_4$ y $D_3$.

- $\underline{K^2 \geq 3}$: ([BCP11]) En cada caso se conocen muchos tipos diferentes de grupos fundamentales realizables. Se conjetura que para $K^2 \leq 3$ siempre el grupo fundamental es finito, mientras que para $K^2 \geq 7$ es siempre infinito. En los casos intermedios se conocen ejemplos de ambos tipos.

**Otro punto de vista:** En todos los casos anteriores el análisis se ha enfocado en el estudio del grupo fundamental. Siguiendo la filosofía de [Fre82] es natural querer considerar el invariante dado por $H^2(S, \mathbb{Z}) = \mathrm{Pic}(S)$ (como reticulado, i.e. con su producto). Esto sigue directamente de la secuencia exponencial pues $q = h^1(\mathcal{O}_S) = 0$ y $p_g = h^2(\mathcal{O}_S) = 0$. Sin embargo, tan sólo construir un ejemplo de superficie de tipo general con $p_g = 0$ es un problema difícil, por lo que no hay mucho conocimiento al respecto de sus posibles grupos de Picard.

Después del célebre trabajo de Lee y Park [LP07], se ha explotado el método para probar existencia de superficies de tipo general con ciertos invariantes fijos por medio de suavizaciones $\mathbb{Q}$-Gorenstein de $W$-superficies $S_0$ en el borde de la compactificación KSBA de $\mathcal{M}_{(K^2,\chi)}$. Luego, dadas dos $W$-superficies $S_0$ y $S_0'$ en el borde de $\mathcal{M}_{(K^2,\chi)}$, es natural preguntarse ¿cuándo sus suavizaciones $\mathbb{Q}$-Gorenstein $\{S_t\}_{t \in \mathbb{D}^\times}$ y $\{S_t'\}_{t \in \mathbb{D}^\times}$ viven en la misma componente conexa de $\mathcal{M}_{(K^2,\chi)}$? Sabemos que si $\mathrm{Pic}(S_t) \not\simeq \mathrm{Pic}(S_t')$ entonces ellas no tiene el mismo topológico y por ende no están en la misma componente conexa. Lo que nos lleva a la siguiente pregunta: ¿Podemos calcular $\mathrm{Pic}(S_t)$ a partir de $S_0$? Resultados recientes de G. Urzúa apuntan hacia una respuesta afirmativa en $p_g = 0$. En efecto, si denotamos $S \to \mathbb{D}$ a la degeneración $\mathbb{Q}$-Gorenstein, entonces $S$ admite un retracto por deformación a $S_0$, luego tomando la secuencia larga en homología del par $(S, S_t)$ tenemos

$$\cdots \to H_2(S_t) = \mathrm{Pic}(S_t) \xrightarrow{sp} H_2(S_0) = \mathrm{Cl}(S_0) \xrightarrow{f} H_2(S, S_t) \to \cdots$$

Bajo las condiciones de la degeneración considerada es posible mostrar que el *mapa de especialización sp* es inyectivo. El reticulado

$$sp(\mathrm{Pic}(S_t)) \subseteq \mathrm{Cl}(S_0)$$

es el llamado *reticulado de Coble-Mukai de* $S_0$ y corresponde justamente a las clases que son límite de ciclos algebraicos de $S_t$ (por un resultado de Kawamata [Kaw92] se sabe que para este tipo de degeneraciones no hay monodromía en torno a $\mathbb{D}^\times$) al tomar $t \to 0$. Lo destacable del trabajo de Urzúa es que dicho reticulado es efectivamente calculable a partir de los divisores que surgen al tomar la resolución minimal de $S_0$, puesto que podemos dar una descripción explícita del mapa $f$ y calcular su kernel. Este invariante aún no ha sido usado para distinguir componentes conexas diferentes de $\mathcal{M}_{(K^2,\chi)}$, podría ser interesante intentar abordar el fenómeno de los agujeros de gusanos [UV21, RU21].

# 3 Superficies con $p_g = 1$

En este caso $\chi > 0$ implica que $q = 0, 1$. Si $q > 0$, entonces $K^2 \geq 2p_g = 2$, luego para $K^2 = 1$ tenemos $q = 0$. En general si $q = 0$ (superficies regulares) tenemos $1 \leq K^2 \leq 18$, mientras que para superficies irregulares $q = 1$ tenemos $2 \leq K^2 \leq 9$.

- $\underline{K^2 = 1}$: ([Cat80, Tod80]) El moduli es irreducible de dimensión 18 y corresponde a superficies obtenidas como intersecciones completas de tipo $(6, 6)$ en $\mathbb{P}^{(1,2,2,3,3)}$.

- $\underline{K^2 = 2,\ q = 0}$: ([CD89]) El moduli tiene 2 posibles grupos fundamentales $\mathbb{Z}/n$ para $n = 1, 2$. El moduli de las superficies con grupo fundamental $\mathbb{Z}/2$ es conexo, irreducible, racional y de dimensión 16. Sobre el moduli de las simplemente conexas sólo se conoce una componente irreducible de dimensión 16, aún se desconoce si es conexo.

- $\underline{K^2 \geq 3,\ q = 0}$: Todorov [Tod81] da ejemplos de este tipo de superficies con $2 \leq K^2 \leq 8$ donde falla el problema de Torelli. Murakami [Mur03] describe el moduli de superficies tales que la torsión del grupo de Picard es $\mathbb{Z}/3$. J. Reyes y G. Urzúa [RU21] dan ejemplos de superficies simplemente conexas con $1 \leq K^2 \leq 9$ vía deformaciones $\mathbb{Q}$-Gorenstein.

- $\underline{K^2 = 2,\ q = 1}$: ([Cat81]) El moduli es irreducible de dimensión 7.

- $\underline{K^2 = 3,\ q = 1}$: ([CC90]) El moduli es irreducible unireglado de dimensión 5.

- $\underline{K^2 = 4, 5,\ q = 1}$: Catanese [Cat98] da ejemplos como cubrimientos Galoisianos dobles de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ (con grupo de Galois $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$).

- $\underline{K^2 = 8,\ q = 1}$: ([Pol06]) Para las superficies de la forma $S = (C \times F)/G$ tales que el mapa bicanónico es de grado 2, el moduli consta de 3 componentes irreducibles de dimensiones 4, 4 y 5.

Enfoquemosnos ahora en el problema de superficies Picard maximales de tipo general con $p_g = 1$. Notemos que este problema es trivial en el caso $p_g = 0$ ya que $\rho = b_2 = h^{1,1}$. Recordemos que una superficie $S$ es Picard maximal si y sólo si

$$H^{1,1}(S) = \mathbb{C} \cdot \langle H^{1,1}(S) \cap H^2(S, \mathbb{Z}) \rangle$$

es decir si $H^{1,1}(S)$ está definido sobre $\mathbb{Z}$ (o equivalentemente sobre $\mathbb{Q}$).

**Observación.** Recordemos que dado un subanillo $k \subseteq \mathbb{C}$, decimos que un $\mathbb{C}$-subespacio vectorial $W \subseteq H^2(S, \mathbb{C})$ está definido sobre $k$ si existe un $k$-modulo $V \subseteq W \cap H^2(S, k)$ tal que

$$W = \mathbb{C} \cdot V = V \otimes_k \mathbb{C}.$$

**Definición.** Denotemos por $D$ al espacio que parametriza todas las posibles descomposiciones de Hodge de $H^2(S, \mathbb{Z})$, el llamado *dominio de periodos* de Griffiths.

Como la descomposición de Hodge es tal que $H^{1,1}(S) = \overline{H^{1,1}(S)}$, el subespacio $V = H^{1,1}(S) \cap H^2(S, \mathbb{R})$ es tal que $\mathbb{C} \cdot V = H^{1,1}(S)$ (es decir $H^{1,1}(S)$ siempre está definido sobre $\mathbb{R}$). Luego $S$ es Picard maximal si y sólo si $V$ está definido sobre $\mathbb{Q}$. Al mover $V$ dentro de $H^2(S, \mathbb{R})$ vemos que el dominio de periodos $D$ se proyecta $2:1$ sobre la Grassmaniana real

$$D \to Gr(b_2, h^{1,1})$$

$$H^{2,0} \oplus H^{1,1} \oplus H^{0,2} \mapsto V$$

y una descomposición de Hodge está definida sobre $\mathbb{Q}$ si y sólo si $V$ está definida sobre $\mathbb{Q}$, lo que corresponde a un conjunto denso numerable de $Gr(b_2, h^{1,1})$. Es decir, $D$ tiene un conjunto denso numerable de descomposiciones de Hodge definidas sobre $\mathbb{Q}$.

**Definición.** Sea $\mathcal{S} \to T$ una familia topológicamente localmente trivial de superficies de tipo general con base una variedad analítica conexa (por ejemplo podríamos tomar $T = \mathbb{D}^{\times}$). El *mapa de periodos* es un mapa holomorfo dado por

$$\mathcal{P} : T \to D$$

$$S_t \mapsto H^{2,0}(S_t) \oplus H^{1,1}(S_t) \oplus H^{0,2}(S_t).$$

Observe que estamos identificando todos los espacios $H^2(S_t, \mathbb{C})$ ya que topológicamente todas las fibras son iguales.

**Pregunta:** ¿Cuándo la imagen del mapa periodos contiene un abierto de $D$? OK para $K^2 = p_g = 1$ y $\mathcal{S}$ siendo el moduli de intersecciones de tipo $(6,6)$ en $\mathbb{P}^{(1,2,2,3,3)}$ [Cat80, Tod80], por lo tanto en este caso hay un conjunto denso numerable de superficies Picard maximales.

Sin embargo, para las familias $\mathcal{S}$ con $K^2 > 1$, $p_g = 1$ y $q = 0$ encontradas por [RU21] vale que

$$\dim \mathcal{S} < \dim D$$

y por ende su imagen nunca contendrá un abierto. Luego, la pregunta que nos toca abordar es: ¿podemos reducir el dominio de periodos $D$? es decir, dada una familia $\mathcal{S} \to T$ ¿cuál es el menor dominio de periodos $\check{D}$ tal que $\mathcal{P}(T) \subseteq \check{D}$?

**Ejemplo.** Las superficies de Kummer son una familia especial de superficies K3 que se construyen del modo siguiente: Sea $J$ una superficie Abeliana, i.e.

$$J = \mathbb{C}^2/\Lambda \text{ para algún reticulado } \Lambda \subseteq \mathbb{C}^2.$$

Sea $\sigma : J \to J$ la involución dada por $\sigma(x) = -x$, y sean $x_1, \ldots, x_{16} \in J$ los 16 puntos fijos por $\sigma$. Entonces

$$X := J/\langle\sigma\rangle$$

tiene 16 singularidades nodales. La *superficie de Kummer* asociada a $J$ es

$$S := \widetilde{X}$$

obtenida como la resolución minimal de $X$. En particular, $S$ es una superficie K3 que cuenta con 16 curvas $-2$ marcadas $E_1, \ldots, E_{16}$. Sigue de la construcción que el moduli $\mathcal{K}$ de superficies de Kummer es isomorfo al moduli de superficies Abelianas, el cual tiene dimensión

$$\dim \mathcal{K} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3.$$

Por otro lado, los números de Hodge de una superficie K3 son $p_g = 1$ y $h^{1,1} = 20$. Luego su dominio de periodos es

$$D = \Gamma \backslash SO(2,19)/SO(2) \times SO(19)$$

y por ende $\dim_{\mathbb{R}} D = \frac{21\cdot 20}{2} - \frac{2\cdot 1}{2} - \frac{19\cdot 18}{2} = 210 - 1 - 171 = 38$, luego $\dim_{\mathbb{C}} D = 19$. Para reducir el dominio de periodos en el caso de superficies de Kummer basta observar que los 16 divisores excepcionales $E_1, \ldots, E_{16}$ forman una subvariación de estructuras de Hodge

$$\mathbb{V}_0 = \bigoplus_{i=1}^{16} \mathbb{Z}[E_i] \subseteq H^2(S_t, \mathbb{Z})$$

con $t \in \mathcal{K}$. Es decir, si $f : \mathcal{S} \to \mathcal{K}$ es la familia de superficies de Kummer, podemos descomponer

$$R^2 f_* \mathbb{Z} = \mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{V}_0^{\perp}$$

de forma que $\mathbb{V}_0$ se vuelve una subvariación de estructuras de Hodge de nivel 0 (es decir $\mathbb{V}_0 \subseteq H^{1,1}(S_t)$, o heurísticamente "tiene $p_g = 0$") y $\mathbb{V}_0^\perp$ corresponde a una subvariación de estructuras de Hodge de nivel 2 ("tiene $p_g = 1$"). De esta forma $\mathbb{V}_0^\perp \otimes \mathcal{O}_\mathcal{K}$ tiene estructuras de Hodge tales que $h^{0,2} = h^{2,0} = 1$ y $h^{1,1} = 20 - 16 = 4$. Luego el mapa periodos se reduce a

$$\mathcal{P} : \mathcal{K} \to \check{D}$$

donde $\check{D}$ es el dominio de periodos correspondiente a $\mathbb{V}_0^\perp$, i.e.

$$\check{\Gamma} \backslash SO(2,3)/S(2) \times SO(3)$$

que satisface $\dim_\mathbb{R} \check{D} = \frac{5 \cdot 4}{2} - \frac{2 \cdot 1}{2} - \frac{3 \cdot 2}{2} = 10 - 1 - 3 = 6$, luego $\dim_\mathbb{C} \check{D} = 3$. Así vemos que hay un conjunto denso numerable de superficies de Kummer Picard maximales.

El ejemplo anterior nos muestra que en el caso $p_g = 1$, si queremos reducir el dominio de periodos, debemos buscar una descomposición de la variación de estructuras de Hodge de $R^2 f_* \mathbb{Z}$, para la familia $f : \mathcal{S} \to T$. Más aún, en este caso esto equivale a encontrar una subestructura de Hodge $\mathbb{V}_0$ de nivel 0, i.e. generada por un conjunto de ciclos algebraicos $\mathbb{V}_0 = \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{Z}[C_i]$ que se deforman como elementos de $\mathrm{Pic}(S_t)$ para todo $t \in T$.

Volviendo al caso de degeneraciones $\mathbb{Q}$-Gorenstein de $W$-superficies $\mathcal{S} \to T$, queremos saber como construir tal $\mathbb{V}_0$ a partir de $\mathrm{Cl}(S_0)$. Siguiendo la filosofía del reticulado de Coble-Mukai, podríamos determinar cuales clases de $\mathrm{Cl}(S_0)$ se extienden como límite de clases en $H^2(S_t, \mathbb{Z})$ para todo $t \in T$. Sin embargo, esto no garantiza que dichas clases se extiendan como ciclos algebraicos, es decir, como elementos de $\mathrm{Pic}(S_t)$. En general esto nunca pasa en $p_g > 0$, por esto definimos lo siguiente.

**Definición.** En el contexto anterior definimos el *submódulo de Coble-Mukai* de $S_0$ como

$$sp(\mathrm{Pic}(S_t)_0) \subseteq \mathrm{Cl}(S_0)$$

donde $\mathrm{Pic}(S_t)_0$ consta de los ciclos algebraicos que se deforman como ciclos algebraicos a lo largo de toda la familia $\mathcal{S} \to T$.

**Observación.** Dado un ciclo algebraico $[C] \in \mathrm{Cl}(S_0)$ tal que se extiende a $H^2(S_t, \mathbb{Z})$ para $t \in T$. Podemos saber si él se extiende como un ciclo algebraico en todo $T$ calculando su *variación infinitesimal de estructuras de Hodge*. En efecto, si consideramos el *locus de Hodge* de $[C]$

$$V_{[C]} := \{t \in T : [C_t] \in \mathrm{Pic}(S_t)\},$$

entonces su espacio tangente en 0 corresponde a

$$T_0 V_{[C]} = \{v \in T_0 T : (C, \nabla_v \omega) = 0\}$$

donde $\nabla_v : H^{2,0}(S_0) \to H^{1,1}(S_0)$ es el mapa de variación infinitesimal de estructuras de Hodge, y $\omega \in H^{2,0}(S_0)$ es la sección global del canónico de $S_0$. Luego si $[C] \in sp(\mathrm{Pic}(S_t)_0)$

entonces $(C, \nabla_v \omega) = 0$ para todo $v \in T_0 T$. Esto es una equivalencia cuando $V_{[C]}$ es suave en 0 para todo $C \in \mathrm{Cl}(S_0)$ (por ejemplo para $0 \in T$ muy general). Recordemos que vía el mapa de Kodaira-Spencer podemos identificar $T_0 T = H^1(T_{S_0})$ y

$$\nabla : H^1(T_{S_0}) \times H^0(\widetilde{\Omega}^2_{S_0}) \to H^1(\widetilde{\Omega}^1_{S_0})$$

es dado por el producto cup en cohomología. En otras palabras, las clases del submódulo de Coble-Mukai corresponden a las clases ortogonales a la imagen de $\nabla$. Como $H^0(\widetilde{\Omega}^2_{S_0}) \simeq \mathbb{C}$, tenemos un mapa inducido

$$\nabla\omega : H^1(T_{S_0}) \to H^{1,1}(S_0)$$

y es tal que

$$sp(\mathrm{Pic}(S_t)_0) = \mathrm{Im}(\nabla\omega)^{\perp} \cap \mathrm{Cl}(S_0)$$

si $V_{[C]}$ es suave en 0 para todo $C \in \mathrm{Cl}(S_0)$.

**Teorema.** El submódulo de Coble-Mukai de $S_0$ determina una descomposición

$$R^2 f_* \mathbb{Z} = \mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{V}_0^{\perp}$$

donde $\mathbb{V}_0$ está dado por las clases de $\mathrm{Pic}(S_t)_0$ para todo $t \in T$. Más aún, el mapa de periodos

$$\mathcal{P} : T \to \check{D}$$

inducido por el dominio de periodos de $\mathbb{V}_0^{\perp}$ tiene derivada en 0 igual a la composición de $\nabla\omega$ con la proyección ortogonal

$$H^1(T_{S_0}) \xrightarrow{\nabla\omega} H^{1,1}(S_0) \to sp(\mathrm{Pic}(S_t)_0)^{\perp},$$

si $V_{[C]}$ es suave en 0 para todo $C \in \mathrm{Cl}(S_0)$. En particular, si $H^{2,0}(S_0) \oplus \mathrm{Im}(\nabla\omega) \oplus H^{0,2}(S_0)$ está definido sobre $\mathbb{Z}$, entonces $\mathcal{P}$ es genéricamente una submersión y por lo tanto $T$ contiene un conjunto denso de superficies Picard maximales (en la topología analítica de $T$) y el submódulo de Coble-Mukai corresponde al grupo de Picard $\mathrm{Pic}(S_t)$ para $t \in T$ muy general. Además en tal caso el mapa de periodos es genéricamente finito si y sólo si $\nabla\omega$ es inyectivo.

**Observación.** Sigue del teorema que bajo las hipótesis anteriores, el submódulo de Coble-Mukai es un invariante que distingue componentes irreducibles de $\mathcal{M}_{(K^2,\chi)}$ en $p_g = 1$.

**Corolario.** Si $0 \in T$ es un punto suave de $T$ tal que $V_{[C]}$ es suave en 0 para todo $C \in \mathrm{Cl}(S_0)$ y rank $sp(\mathrm{Pic}(S_t)_0) = h^{1,1} - \dim T$, entonces $T$ contiene un conjunto denso de superficies Picard maximales y $sp(\mathrm{Pic}(S_t)_0) = \mathrm{Pic}(S_t)$ para $t \in T$ muy general.

# References


[Bau01] Ingrid C Bauer. *Surfaces with $K^2 = 7$ and $p_g = 4$*. Number 152. American Mathematical Soc., 2001.

[BCG08] Ingrid Bauer, Fabrizio Catanese, and F Grunewald. The classification of surfaces with $p_g = q = 0$ isogenous to a product of curves. *Pure and Applied Mathematics Quarterly*, 4(2):547–586, 2008.

[BCP06] Ingrid C Bauer, Fabrizio Catanese, and Roberto Pignatelli. The moduli space of surfaces with $k^2 = 6$ and $p_g = 4$. *Mathematische Annalen*, 2(336):421–438, 2006.

[BCP11] Ingrid Bauer, Fabrizio Catanese, and Roberto Pignatelli. Surfaces of general type with geometric genus zero: a survey. In *Complex and differential geometry*, pages 1–48. Springer, 2011.

[Cat80] Fabrizio Catanese. The moduli and the global period mapping of surfaces with $k^2 = p_g = 1$: a counterexample to the global torelli problem. *Compositio Mathematica*, 41(3):401–414, 1980.

[Cat81] Fabrizio Catanese. On a class of surfaces of general type. In *Algebraic surfaces*, pages 267–284. Springer, 1981.

[Cat84] F Catanese. On the moduli spaces of surfaces of general type. *Journal of Differential Geometry*, 19(2):483–515, 1984.

[Cat98] F Catanese. Singular bidouble covers and the construction of interesting algebraic surfaces. *Contemp. Math*, 241, 1998.

[Cat03] Fabrizio Catanese. Moduli spaces of surfaces and real structures. *Annals of mathematics*, pages 577–592, 2003.

[CC90] Fabrizio Catanese and Ciro Ciliberto. *Symmetric Products of Elliptic Curves and Surfaces of General Type with $p_g = q = 1$*. Università di Pisa. Dipartimento di Matematica, 1990.

[CD89] Fabrizio Catanese and Olivier Debarre. Surfaces with $k^2 = 2, p_g = 1, q = 0$. *J. reine angew. Math*, 395:1–55, 1989.

[CS10] Donald I Cartwright and Tim Steger. Enumeration of the 50 fake projective planes. *Comptes Rendus Mathematique*, 348(1-2):11–13, 2010.

[Enr49] Federigo Enriques. *Le superficie algebriche*. N. Zanichelli, 1949.

[Fre82] Michael Hartley Freedman. The topology of four-dimensional manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 17(3):357–453, 1982.

[Hor73] Eiji Horikawa. On deformations of quintic surfaces. *Proceedings of the Japan Academy*, 49(6):377–379, 1973.

[Hor76] Eiji Horikawa. Algebraic surfaces of general type with small $c_1^2$, I. *Annals of Mathematics*, pages 357–387, 1976.

[Hor78] Eiji Horikawa. Algebraic surfaces of general type with small $c_1^2$, III. *Inventiones mathematicae*, 47(3):209–248, 1978.

[Kaw92] Yujiro Kawamata. Moderate degenerations of algebraic surfaces. In *Complex Algebraic Varieties*, pages 113–132. Springer, 1992.

[LP07] Yongnam Lee and Jongil Park. A simply connected surface of general type with pg= 0 and k 2= 2. *Inventiones mathematicae*, 170(3):483–505, 2007.

[Man94] Marco Manetti. On some components of moduli space of surfaces of general type. *Compositio Mathematica*, 92(3):285–297, 1994.

[Man01] Marco Manetti. On the moduli space of diffeomorphic algebraic surfaces. *Inventiones mathematicae*, 143(1):29–76, 2001.

[Miy82] Yoichi Miyaoka. Algebraic surfaces with positive indices. In *Proc. Symp. Katata/-Jap*, pages 281–301, 1982.

[Mur03] Masaaki Murakami. Minimal algebraic surfaces of general type with $c_1^2 = 3, p_g = 1$ and $q = 0$, which have non-trivial 3-torsion divisors. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 43(1):203–215, 2003.

[Noe75] Max Noether. Zur theorie des eindeutigen entsprechens algebraischer gebilde. *Mathematische Annalen*, 8(4):495–533, 1875.

[Pol06] Francesco Polizzi. Surfaces of general type with $p_g = q = 1, k^2 = 8$ and bicanonical map of degree 2. *Transactions of the American Mathematical Society*, 358(2):759–798, 2006.

[PY07] Gopal Prasad and Sai-Kee Yeung. Fake projective planes. *Inventiones mathematicae*, 168(2):321–370, 2007.

[Rei78] M Reid. Surfaces with $p_g = 0$, $k^2 = 1$. *Sci. Univ. Tokyo Sect. A*, 1:25, 1978.

[RU21] Javier Reyes and Giancarlo Urzúa. Rational configurations in k3 surfaces and simply-connected $p_g = 1$ surfaces for $k^2 = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. *arXiv preprint arXiv:2110.10629*, 2021.

[Tod80] Andrei N Todorov. Surfaces of general type with $p_g = 1$ and $(k, k) = 1$. I. In *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, volume 13, pages 1–21, 1980.

[Tod81] Andrei N Todorov. A construction of surfaces with $p_g = 1, q = 0$ and $2 \leq k^2 \leq 8$. *Inventiones mathematicae*, 63(2):287–304, 1981.

[UV21] Giancarlo Urzúa and Nicolás Vilches. On wormholes in the moduli space of surfaces. *arXiv preprint arXiv:2102.02177*, 2021.

[Yau77] Shing-Tung Yau. Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 74(5):1798–1799, 1977.