UNIVERSIDAD DE TARAPACÁ
Universidad del Estado

CONGRESO MATEMÁTICA CAPRICORNIO
COMCA 2024
31-07 al 02-08

«Herramientas topológicas en superficies algebraicas»

- Plan: 4 charlas durante septiembre sobre interacciones Geo alg, top alg y comb.
- objeto de estudio: conf. de rectas en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ ~~[illegible]~~ aunque la técnica va más allá.
- X En baby hablaremos de rectas alrededor de números de Chern: «Some open questions about line arrang. in the proj. plane». (en proyecciones)
- Def.- Una recta compleja $\{ax+by+cz=0\} \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.
  recta real / racional / cualquier cuerpo

Dar una recta sobre k $\longleftrightarrow$ Dar un punto sobre k

- Def.- Una conf. de rectas es $\{L_1, \dots, L_d\} = \mathcal{A}$
- Def.- Un m-punto es $\ast^m$. $t_m = \#$ m-puntos.
- $\therefore \binom{d}{2} = \sum_{m \geq 2} \binom{m}{2} t_m$.
- Ej.- trivial, casi-trivial, Fermat, genérico.

Teorema (baby baby Jueves): A arreglo no trivial ni casi trivial

$$\Longrightarrow 2t_2 + t_3 \geq 3 + d + \sum_{m \geq 4} (m-4) t_m .$$

$= \Longleftrightarrow$ dual Hesse.

- Si A es real $\Longrightarrow t_2 \geq 3 + \sum_{m \geq 3} (m-3) t_m$ 1948
- Si A es lo que sea $\Longrightarrow \sum_{m \geq 2} t_m \geq d$ (de Bruijn-Erdős)

§1. Combinatoria.

Def: Dada $L_1, \dots, L_d$ conf. de rectas, definir
$$B = d-1-\sum_{m \text{ impar}}(m-1)t_m + \sum_{m \text{ par}} m t_m .$$

Lema: Si d es impar $\Rightarrow B \equiv 0\ (8)$.

Dem: (combi) Si t_2 es el único distinto de cero $\Rightarrow$ ok. Ahora ir de m-point a m-point modificando y en cada paso se mantiene $\equiv 0 (8)$.

Cor: Si d es par $\Rightarrow 3d - \sum_{m \text{ impar}}(m-1)t_m + \sum_{m \text{ par}} m t_m \equiv 0 (8)$.

Cor: Si solo puntos triples $\Rightarrow d \equiv 1, 3\ (6)$.

Example: All finite proj conf. satisfy $B = (q+1)^3$ for $q = p^n$, p impar or $B = -8^n$ para $q = 2^n$.

§2. Geo. alg.

$$X = Bl_{\substack{m\text{-pts} \\ \forall m}}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}) \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$$

Let $L_1, \dots, L_d$ los transf. propias de $L_1, \dots, L_d$

UNIVERSIDAD DE TARAPACÁ
Universidad del Estado
CONGRESO MATEMÁTICA CAPRICORNIO
COMCA 2024
31-07 al 02-08

Pregunta principal de SGA Sept 2024: ¿Existe algún otro arreglo complejo con solo puntos triples aparte de
$$* \quad (x^3-y^3)(x^3-z^3)(y^3-z^3) = 0 \ ?$$

obs: Esto NO es solo combinatoria: Por ejemplo Fano plane, u otras cosas.

obs: En principio es un conjunto de d puntos $\left(\binom{d}{2} = 3t_3\right)$ y t_3 determinantes para alguna combin. que se hacen cero.

$2a+1 = d$.

Estrategia: Suponer que existe y construir algo que no existe. La construcción empleada será topológica y nos socorre de Geo alg.

Teorema: (Golla 2024) Un arreglo de d rectas con solo puntos triples podría solo existir para $d \equiv 1, 3, 9, 19\ (24)$.

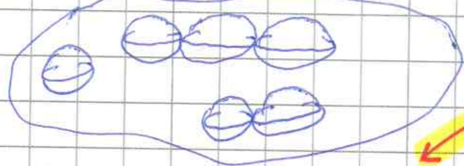
dual? ...
Hesse

Preg: ¿Podemos mejorar* la técnica para mejorar resultado?

Lema: Si d es impar y hay mult. pares $\Rightarrow \zeta = \sum L_i + \sum_{m\ even} E_i$ no represen por esfera. Si no hay $\Rightarrow$ sí lo es.

¿Qué clases serán "evidentemente" representadas por una esfera?

Ejl.-



Para Mauricio

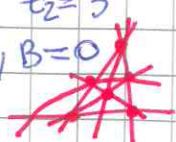
$\Rightarrow$ "Ponerlos todos juntos"

Tarea: Para una clase ζ representada por configuraciones transversales ¿es ζ repr por suma conexa?

[ie,  $= \zeta \Rightarrow [\zeta] = [$  $]$]

Dem lema: Elije par, solo impar $\Rightarrow d =$ par $\therefore \exists$ par y seguir $\Rightarrow$ se debe cerrar $\Rightarrow$ ciclo ■

Ejl.- $d=7$: $t_3=6$, $t_2=3$, $g=1$, $B=0$



$t_3=5$, $t_2=6$, $g=1$, $B=8$

solo 3-pts

Mauricio Magia de clase característica, porque?

Teo: (Kervaire-Milnor) ζ clase característica en M^4 cerrada conexa diff var. y $[\ominus]=\zeta \Rightarrow \zeta^2 \equiv \sigma(M)\ (16)$.

UNIVERSIDAD DE TARAPACÁ
Universidad del Estado
CONGRESO MATEMÁTICA CAPRICORNIO
COMCA 2024
31-07 al 02-08

$t := \sum_{m \geq 2} t_m$

y $E_1, \dots, E_{\sum_{m\geq 2} t_m}$ los excepcionales

Def.- Una clase característica en X (o donde sea) es un $D \in H^2(X,\mathbb{Z})$ tal que
$$D \equiv K_X \pmod 2$$
Para Mauricio en general

ie (en nuestro caso)
$$D = K_X + \sum \alpha_i D_i \quad \text{con } \alpha_i \equiv 0\ (2)\ \forall i.$$

Lema: $\sum L_i + \sum_{m\ even} E_i$ es característica.

Dem.- Hacerlo.

We have: $B = -\sigma(X) + \left(\sum L_i + \sum_{m\ even} E_i\right)^2$,

donde $\sigma(X) =$ signature de $X = 1 - \sum_{m\geq 2} t_m$.

§3. Topology (back to Kervaire-Milnor 1961 "On 2-spheres in 4-Manifolds")

Y la maldición de la dimensión 4: Si M^{2n} es una variedad diferenciable de dim $2n$ simplemente conexa y $\zeta \in \pi_n(M^{2n})$ $S^n \to M^{2n} \Rightarrow$ si $n>2$, ζ está representado por $S^n \xhookrightarrow{\text{difeo emb.}} M^{2n}$. $n=2$ No!

[preciso entre π_2 y H^2] Hurewicz: $\pi_1 = 1 \Rightarrow \pi_2 = H_2 \cong H^2$.