SEMINARIO DE GEOMETRÍA ALGEBRAICA UC
EL TEOREMA DE KERVAIRE–MILNOR

MAURICIO BUSTAMANTE

Resumen. Estas son mis notas de mi charla en Seminario de Geometría Algebraica de la PUC en Septiembre, 2024.

1. Charla 1

Sea M una 4-variedad diferenciable cerrada (= compacta y sin frontera). Vamos a asumir que M está orientada. Bajo estas condiciones, tenemos el isomorfismo

$$H_k(M; R) \cong H^{4-k}(M; R).$$

dado por dualidad de Poincaré. El siguiente lema puede ser útil después.

Lema 1.1. *Si adicionalmente $H_1(M) = 0$, entonces $H_2(M)$ es un grupo abeliano libre y finitamente generado.*

Demostración. M tiene el tipo de homotopía de un complejo CW finito (e.g. por teoría de Morse). Por tanto su homología es finitamente generada. Además, por el teorema de coeficientes universales, tenemos:

$$H_2(M; \mathbb{Z}) \cong H^2(M; \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(H_2(M); \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Ext}(H_1(M; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(H_2(M); \mathbb{Z}).$$

y por tanto es libre de torsión. □

Una característica importante de las 4-variedades, es que las clases de homología en $H_2(M; \mathbb{Z})$ se pueden representar por superficies *encajadas*[1].

Lema 1.2. *Para todo $x \in H_2(M; \mathbb{Z})$ existe una superficie cerrada orientable Σ_g de género g y un encaje $f : \Sigma_g \to M$ tal que*

$$f_*[\Sigma_g] = x,$$

donde $[\Sigma_g] \in H_2(M)$ es la clase fundamental de Σ_g.

Demostración. Tenemos los siguientes isomorfismos:

$$H_2(M) \cong H^2(M) \cong [M, K(\mathbb{Z}, 2)] \cong [M, \mathbb{C}P^\infty] \cong [M, \mathbb{C}P^2],$$

donde el primer isomorfismo es dualidad de Poincaré, el segundo es teoría de obstrucción, el tercero es la elección de un model para el espacio de Eilenberg-Maclane $K(\mathbb{Z}, 2)$ y el último es el teorema de aproximación celular.

Con esto, a una clase $x \in H_2(M)$, le corresponde una función continua $M \to \mathbb{C}P^2$ la cual podemos deformar a una función suave φ transversal a la esfera $S^2 \in \mathbb{C}P^2$ que genera a $H_2(\mathbb{C}P^2; \mathbb{Z})$. La preimagen $\varphi^{-1}(S^2) \subset M$ es la superficie encajada que buscamos. □

[1]Sean X y Y variedades diferenciables compactas. Un encaje de X en Y es una función $f : X \to Y$ inyectiva cuya derivada en cada punto es inyectiva.

El siguiente teorema de Kervaire–Milnor nos da una obstrucción para que ciertas clases en H_2 se puedan representar por esferas encajadas.

Teorema 1.3. *Sea $\xi \in H_2(M)$ una clase de homología característica. Si ξ está representada por una esfera en M, entonces*

$$\xi^2 = \operatorname{sign}(M) \quad \text{mód } 16.$$

Antes de explicar la demostración, vamos a explicar el enunciado. En particular, queremos explicar

1. Qué significa elevar al cuadrado una clase de homología.
2. Qué es la signatura $\operatorname{sign}(M)$ de una variedad.
3. Qué es una clase de homología característica.

Forma de intersección. Sean x y y dos clases en $H_2(M;\mathbb{Z})$. Por lo anterior, existen superficies S_x y S_y que representan a x y y respectivamente. Podemos asumir que dichas superficies se intersectan transversalmente en M. Dicha intersección es una subvariedad compacta de dimensión 0, es decir, un conjunto finito de puntos. Contar esos puntos, teniendo en cuenta la orientación, nos da un número entero. Se puede demostrar que este proceso define una forma bilineal simétrica

$$\cdot : H_2(M;\mathbb{Q}) \otimes H_2(M;\mathbb{Q}) \to H_0(M;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$$

Así, cuando escribimos ξ^2, nos referimos a $\xi \cdot \xi$.

Signatura. La signatura de M la denotamos por $\operatorname{sign}(M)$ es la signatura de la forma bilineal, es decir, es la diferencia entre el número de valores propios positivos y valores propios negativos. Por ejemplo:

- La forma de intersección de $\mathbb{C}P^2$ es la matriz (1). Por tanto su signatura es 1.
- La forma de intersección de $\mathrm{Bl}_1(\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P}^2$ es la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Por tanto su signatura es 0. Más generalmente $\operatorname{sign}(\mathrm{Bl}_t(\mathbb{P}^2)) = 1 - t$.
- La forma de intersección de $S^2 \times S^2$ es la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Por tanto su signatura es 0.

Estructuras espín. Sea N una variedad diferenciable compacta de dimensión n orientable. Su haz de n-marcos de referencia ortonormales $\mathrm{Fr}(N) \to N$ es un haz principal sobre N con fibra $SO(n)$.

Una estructura spin sobre N es un $\mathrm{Spin}(n)$-haz principal $\mathrm{S}(N)$ sobre N, junto con un cubrimiento de 2-hojas

$$\rho : \mathrm{S}(N) \to \mathrm{Fr}(N)$$

el cual satisface:

- El cubriente ρ es un mapeo de haces fibrados principales.
- La restricción a cada fibra $\mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ es el cubriente doble.

Ahora, los cubrientes dobles de $\mathrm{Fr}(N)$ están en correspondencia biyectiva con subgrupos de índice 2 de $\pi_1(\mathrm{Fr}(N))$. Ese conjunto es lo mismo, por el teorema de coeficientes unviersales, que $H^1(\mathrm{Fr}(N);\mathbb{Z}_2)$. Por esto, una estructura spin sobre N es lo mismo que una clase de cohomología $\mathfrak{s} \in H^1(\mathrm{Fr}(N);\mathbb{Z}_2)$ tal que, para cada fibra, $\mathfrak{s}$ se restringe al generador de $H^1(SO(n);\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$.

Observación 1.4. En el caso $n = 1$, la última condición no aplica. También $\mathrm{Spin}(1) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Clases de homología caracterísitcas. Para definir clases de homología características, necesitamos la noción de clases de Stiefel-Whitney. Para esto, usaremos el siguiente lema.

Lema 1.5. *Existe una sucesión exacta*

$$0 \to H^1(N;\mathbb{Z}_2) \to H^1(\mathrm{Fr}(N);\mathbb{Z}_2) \to H^1(\mathrm{SO}(n);\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{w} H^2(N;\mathbb{Z}_2)$$

Demostración. Es consecuencia directa de la sucesión espectral de Serre para la fibración

$$SO(n) \to \mathrm{Fr}(N) \to N.$$

□

Definición 1.6. La segunda clase de Stiefel–Whitney $w_2(M) \in H^2(N;\mathbb{Z}_2)$ de N es la imagen del generador θ de $H^1(\mathrm{SO}(n);\mathbb{Z}_2)$ bajo el homomorfismo w.

Proposición 1.7. *Una variedad diferenciable N es spin (i.e. admite una estructura spin) si y solo si $w_2(N) = 0$. En tal caso, el número de estructuras spin es igual a la cardinalidad de $H^1(N;\mathbb{Z}_2)$.*

Demostración. Es consecuencia directa de la sucesión exacta del lema previo. □

Definición 1.8. Una clase de homología $\xi \in H_2(N;\mathbb{Z})$ se llama *característica* si su imagen bajo

$$H_2(N;\mathbb{Z}) \to H_2(N;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cong} H^2(N;\mathbb{Z}_2)$$

es $w_2(N)$.