Recuerdos más lejanos:

(Conj 200USD): Los únicos conj de rectas en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ con sólo puntos triples son $\ast$ y dual Hesse.

(Golla 2024): Si un arreglo de d rectas tiene solo puntos triples $\Rightarrow d \equiv 1, 3, 9, 19 \ (24)$.

Dem|- Kervaire-Milnor directo ■

Más general: Sean $\{L_1, \dots, L_d\}$ rectas en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ con d impar.

$$X = Bl\, \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, \qquad t = \sum_{m \geq 2} t_m$$

$$\underbrace{\sigma^*(L_1 + \dots + L_d)}_{\substack{\shortparallel \\ dH}} = L_1 + \dots + L_d + \sum_{i=1}^{t} m_i E_{m_i}$$

mult sobre x_i

Como $K_X \sim \sigma^*(-3L) + \sum_{i=1}^{t} E_{m_i}$

$$\Rightarrow L_1 + \dots + L_d + \sum_{m_i \text{ par}} E_{m_i} = \xi \text{ es caract.}$$

obs|- $\sigma(X) = 1 - t$ y

$$-\sigma(X) + \xi^2 = B := d - 1 - \sum_{m \text{ imp}} (m-1) t_m + \sum_{m \text{ par}} m t_m$$

UNIVERSIDAD DE TARAPACÁ
Universidad del Estado
CONGRESO MATEMÁTICA CAPRICORNIO
COMCA 2024
31-07 al 02-08

56A herramientas topológicas 1-Oct-2024

Recuerdos:

(1) Sea M variedad suave, cerrada, dim $= 4$, orient. $\xi \in H_2(M, \mathbb{Z}) = H^2(M, \mathbb{Z})$ se llama clase característica si $H_2(M,\mathbb{Z}) \to H_2(M, \mathbb{Z}/2)$, $\xi \mapsto w_2(M)$

2da clase de Stiefel-

(2) Si M además es superficie compleja $\Rightarrow w_2(M) = -K_M$.

(3) M es spin si $w_2(M) \equiv 0 \pmod 2$.

obs: Si M = sup. compleja es spin $\Rightarrow$ por adjunción $C^2 \equiv 0 \pmod 2$ $\forall$ curva $C \subset M$. En efecto la forma cuadrática en $H^2(M,\mathbb{Z})$ es par. $\boxed{\text{Si } H_1(M,\mathbb{Z}) \text{ no tiene torsión} \Rightarrow M \text{ es spin ssi } Q_M \text{ es par.}}$

Así, casi nunca una sup. compleja es spin. Pero hay muchos!

Ej|- $X \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^2$ ramificados en $\{F_{2d} = 0\}$ tal que $d \equiv 1 \ (2)$.

$\therefore \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, K3, Horikawa, etc.

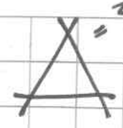
Teo Hirzebruch: (para M sup alg)

$$\boxed{\operatorname{sign}(M) = \frac{1}{3}\left(K_M^2 - 2\chi_{top}(M)\right) = K_M^2 - 8\chi(\mathcal{O}_M)}$$

UNIVERSIDAD DE TARAPACÁ
Universidad del Estado

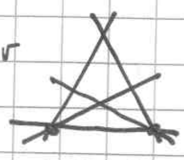
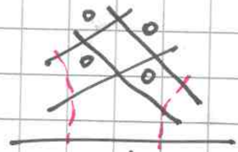
Rec: $\mathrm{Arf}(\mathbb{P}^2, \xi)$

CONGRESO MATEMÁTICA CAPRICORNIO
COMCA 2024
31-07 al 02-08

Ejl.-  $= \xi$ en $\mathbb{P}^2$ es característica

$$\Rightarrow 1 - 9 = 8 \Rightarrow \mathrm{Arf}(\mathbb{P}^2, \xi) = 1$$

[FK78]

Ejl.-  $\leftarrow$  $g = 1$

-1

$d=5,\ t_2=4,\ t_3=2$

$B = 4 - 2\cdot 2 + 2\cdot 4 = 8 \Rightarrow \mathrm{Arf} = 1$.

Prop.- Para nuestro ξ en $X = Bl_t(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$, tenemos que existe representante de género:

$$g(\xi) = c - d + \sum_{m \text{ par}} (m-1)t_m$$

donde $c = \#\{\text{componentes conexas de } \xi\}$.

Dem: Tarea.

Obs.- Posiblemente este es el género mínimo para ξ. Mirar «The symplectic thom conjecture» Ann. Math. 2000.

Prop: $1 \leq g(\xi)$ cuando hay alguna mult. par.

Dem: ya se hizo.

UNIVERSIDAD DE TARAPACÁ
Universidad del Estado

CONGRESO MATEMÁTICA CAPRICORNIO
COMCA 2024
31-07 al 02-08

✓ Demostramos que d impar $\Rightarrow B \equiv 0\ (8)$.

[KM62] Si $\xi = [\ominus] \Rightarrow \sigma(M) \equiv \xi^2\ (16)$.

Así, si solo hay mult impares tenemos por "Lema de sumas" que $\xi = [\ominus]$ $\Rightarrow$ Gollo.

★ ¿Qué pasa si es que hay mult par?

✓ Demostramos que la representación en sumas tiene al menos género 1.

[Freedman-Kirby 1978] Sea M variedad suave, cerrada, orientable, $\dim = 4$. ξ característica

$$\Rightarrow \sigma(M) - \xi^2 \equiv 8\,\mathrm{Arf}(M,\xi)\ (16),$$

donde $\mathrm{Arf}(M,\xi)$ es el invariante de Arf para $H_1(\xi, \mathbb{Z}/2)$ y una función q adecuada.

Tenemos $H_1(\xi, \mathbb{Z}/2) = (\mathbb{Z}/2)^{2g}$ y

$$\begin{array}{c} \alpha_1\ \beta_1 \cdots \alpha_g\ \beta_g \\ \begin{bmatrix} & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & \ddots & \\ & & 1 & \end{bmatrix} \end{array}$$

forma en $H^1|_{\mathbb{Z}/2}$

y $q: H_1(\xi, \mathbb{Z}/2) \to \mathbb{Z}/2$ por definir tal que

$$q(x+y) \equiv q(x) + q(y) + x\cdot y\ (2).$$

$$\therefore \mathrm{Arf}(M,\xi) = \sum_{i=1}^{g} q(\alpha_i)\,q(\beta_i)$$

Para $g=0$, $\mathrm{Arf}=0$.

Ejemplo Fano

Arreglo con $d = 6\ell + {1 \atop 3}$ y solo 3-puntos.

$\Rightarrow \quad t_3 = {(6\ell+1)\ell \atop (2\ell+1)(3\ell+1)}$ d debe tener esta forma.

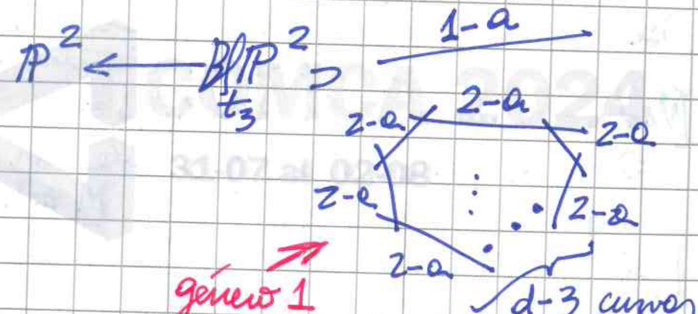
$\underbrace{\times \; \cdots \; \times}_{a} \quad \Rightarrow a = {3\ell \atop 3\ell+1}$

Sacar dos rectas

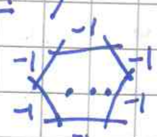
$\Rightarrow \quad d' = d-2 \quad t_3' = t_3 - (a+a-1)$

$t_2' = 2a-2$

$\Rightarrow$



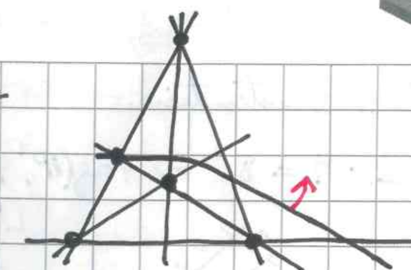
Problema relevante: calcular geométricamente $\mathrm{Arg}(Bl_{t_3}\mathbb{P}^2, \ldots)$

- Si $a=3$ (ie $\ell=1$) $\Rightarrow$  y es curva elíptica movible.
- Si $a>3$ $\Rightarrow$ es rígida y resolución de una singularidad cuspidal.

★ Preg: tenemos que $\mathrm{Arg}=0$ $\forall$ tal config?

neg. deg.

Ej 1.-



$d=7 \quad t_3=5$

$t_2=6$

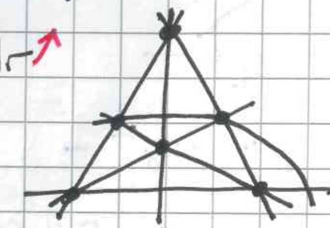
No disco

disco

$B=8 \quad \mathrm{Arg}=1$

y $g=2$.

Ej 1.-



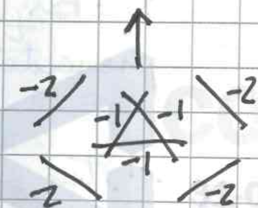
$d=7 \quad t_3=6$

$t_2=3$

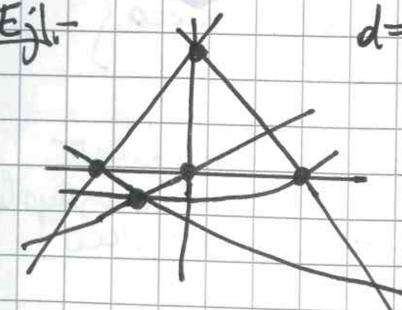
$B = 6 - 2\cdot 6 + 2\cdot 3 = 0$

$\Rightarrow \mathrm{Arg}=0$.

Topológicamente, porqué $\mathrm{Arg}=0$?



Ej 1.-

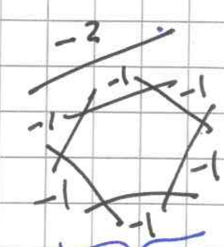


$d=7 \quad t_3=5$

$t_2=6$

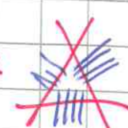
$B=8$

$\mathrm{Arg}=1$



funciona como curva elíptica

Cuidado:



$\Rightarrow \mathrm{Arg}=1$

Prop.- $\mathrm{Arf}(\mathcal{X}) = \mathrm{Arf}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, dH)$
$+ \sum_{k\geq 0} t_{8k+3} + \sum_{k\geq 0} t_{8k+5}$
$+ \sum_{k\geq 0} t_{8k+4} + \sum_{k\geq 0} t_{8k+6}$

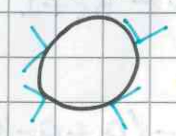
donde $\mathrm{Arf}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, dH) = \begin{cases} 0 & d\equiv 1,7\ (8) \\ 1 & d \equiv 3,5\ (8) \end{cases}$.

Tarea: A pesar de usar #, esto es aún combinatorial? Demostrarlo a partir de arreglo general.

ie $B \equiv 8\cdot \mathrm{Arf}(\mathcal{X})\ (16)$
a mano!

Obs.- De acuerdo a [Kirby "Top. of 4-manif", p.36]
Dado loop $\in \xi$, $\alpha = S^1$
"α"
$\Rightarrow q(\alpha) = 0 \Leftrightarrow$ la estructura spin inducida por $\xi|_{S^1}$ es the bounding spin structure

[la otra es:



]

Preg.- $\mathrm{Arf}(M,\xi)$ depende solo de una vecindad de ξ? Creo que NO.

De ser así, podríamos comparar Arf's!!!

$\pi_1(M)=1$. Entonces

[Kirby-Freedman] Si $\mathrm{Arf}(M,\xi)=0$
$\Rightarrow \exists k$ tal que ξ puede ser representada por ⊖ en $M\#k(\mathbb{CP}^1\times\mathbb{CP}^1)$.

[Si $\mathrm{Arf}(M,\xi)=1 \Rightarrow \xi = [$⊙$]$] ¿Qué es eso?

Obs.- Arf es un invariante de cobordismos:
$\mathrm{Arf}(M\#M', \xi\#\xi') = \mathrm{Arf}(M,\xi) + \mathrm{Arf}(M',\xi')$

Con solo esa propiedad formal se puede calcular Arf de una configuración arbitraria de d = impar rectas $\{L_1, .., L_d\}$ en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$?