

§1 Semi-grupos y variedades toricas afines

↓
Sob. Eticnic.

Semi-grupos
fin. generados
integrables

Var. toricas
como k -alg.
f. g.

→ Def: $(S, +)$ semi-grupo, $+$ conv. comm, 0 . $\varphi: S \rightarrow S'$
 $\varphi(u+w) = \varphi(u) + \varphi(w)$, $\varphi(0) = 0$.

Sea $k = \bar{k}$. Sea $S =$ semi-grupo \rightsquigarrow $k[S] = \{x^u : u \in S\}$
 $x^u \cdot x^v = x^{u+v}$

→ Si tenemos un morfismo de semi-grupos $\varphi: S \rightarrow S' \rightsquigarrow$ $k[S] \xrightarrow{\text{conv.}} k[S']$
 $x^u \mapsto x^{\varphi(u)}$

Ex: $k[\mathbb{N}^n] \cong k[t_1, \dots, t_n]$, $k[\mathbb{Z}^n] \cong k[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$

→ Def: S semi-grupo f. g. si existen $u_1, \dots, u_n \in S$ tales que $\forall v \in S$
existen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ tales que $v = \sum_{i=1}^n a_i u_i$.

Obs: Si $k[S]$ es f. g. k -alg $\Rightarrow S$ es f. g.

Def: S semi-grupo f. g. es integral si existe un morfismo injectivo $\varphi: S \rightarrow \mathbb{Z}^m$
para algun m .

Obs: Cualquier semi-grupo f. g. integral es isomorfo a la imagen de
 $\varphi: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{Z}^m$.

→ Lema: Si S es un semi-grupo f. g. integral, entonces $k[S]$ es una k -algebra
f. g. sin divisores de 0. Luego $X = \text{Spec}(k[S])$ es una var.
sobre k .

Cor: dim X = rk S^{gp}

T ⊆ X, T × X → X la acción está determinada por la operación de semigrupo en Hom(S, (k, ·))

k[S] → k[S] ⊗ k[S^{gp}] , x^u ↦ x^u ⊗ x^u

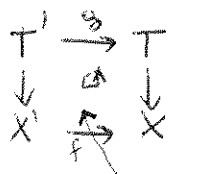
Def: Dado un semigrupo S integral y f.g., la variedad tónica a S es X = Spec(k[S]), T = Spec(k[S^{gp}]) ⊂ X.

Ej: S = {m ∈ N : m ≠ 1} S^{gp} = Z f: k[u, v] → k[S] u ↦ x², v ↦ x³ hen f = (u³ - v²)

X = Spec(k[S]) ↪ A²_k T = Spec(k[Z]) = k*

X = Z(u³ - v²) t ∈ T, (x, y) ∈ X t · (x, y) = (t²x, t³y)

Def: Sea φ: S → S' morfismo de semigrupos ...



φ^{gp} morfismo de grupos abelianos y f(λφ) = g(λ)φ(g)

Si f(λ · φ) = g(λ)φ(g) ⇒ f se dice morfismo tónico

tomemos cualquier

→ Semi-grupos vs Var. Tónicas

Def: Sea X una variedad afin, T ⊂ X abierto un toro tal que la acción de T en si mismo se extiende a una acción de T en X, entonces existe un semi-grupo integral f.g. S y un morfismo X ≅ Spec(k[S]) que induce

T ≅ Spec(k[S^{gp}]) compatible con la acción.

(4)

Dem: $T \cong \text{Spec}(k[M])$ M abeliano f.g. libre.

$\therefore \mathcal{O}(X) \subseteq k[M]$. Existe un subconjunto $S \subseteq M$ tal que $\mathcal{O}(X) = \bigoplus_{u \in S} k \chi^u$ (dada por la acción del toro).
Mira notas de Mircea

\therefore se prueba $S^{\text{gr}} = M$.

Prop: Sean S y S' semi-grupos ^{f.g. int.} mono. toros con su respectivos $f: \text{Spec}(k[S]) \rightarrow \text{Spec}(k[S'])$
 $g: \text{Spec}(k[S^{\text{gr}}]) \rightarrow \text{Spec}(k[S'^{\text{gr}}])$
Entonces $\exists!$ morfismo $\varphi: S' \rightarrow S$ tal que f es inducido por φ .

Dem: Mira Mircea's. Para el $\chi^{u'}$ $\mapsto \sum_{u \in S^{\text{gr}}} \alpha_u \chi^u = \chi^{u'}$
P.d. \dots

→ Subvariedades

Def: Una coro de un semi-grupo S es un subgrupo F tal que si $u, v \in S$ son tales que $u+v \in F \Rightarrow u, v \in F$.

Prop: las subvariedades (irred.) invariantes por T en $X = \text{Spec}(k[S])$ están en corresp. 1-1 que preserve inclusión que preserve inclusión con los conos de S .

Ej: $\mathbb{A}^2 = \text{Spec}(k[x_1, x_2])$ (El ideal de la var. conesp. a F es $\bigoplus_{u \in S \setminus F} k \chi^u$)