§1 Semigrupos y variedades tóricas afines

Semigrupos fin. generados integrales	Var. tóricas como k-alg f. g.

→ Def.- $(S,+)$ semigrupo, + asoc. conm, 0. $\varphi : S \to S'$
$\varphi(u+u') = \varphi(u) + \varphi(u')$, $\varphi(0) = 0$.

Sea $k = \bar{k}$. Sea S = semigrupo $\underset{\text{asociar}}{\rightsquigarrow}$ $k[S] = \{\chi^u : u \in S\}$
$\chi^u \cdot \chi^v = \chi^{u+v}$.

→ Si tenemos un morfismo de semigrupos $\varphi : S \to S'$ $\underset{\text{asoc.}}{\rightsquigarrow}$ $k[S] \xrightarrow{f} k[S']$
$\chi^u \mapsto \chi^{\varphi(u)}$

Ej. $k[\mathbb{N}^n] \cong k[t_1, \dots, t_N]$, $k[\mathbb{Z}^n] \cong k[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$

→ Def.- S semigrupo f.g. si existen $u_1, \dots, u_n \in S$ tales que $\forall v \in S$ existen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ tales que $v = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$.

Obs: Si $k[S]$ es f.g. k-alg $\Rightarrow$ S es f.g.

Def.- S sgr. f.g. es <u>integral</u> si existe un morfismo inyectivo $\varphi : S \to \mathbb{Z}^m$ para algún m.

Obs: Cualquier semigrupo f.g. integral es isomorfo a la imagen de $\varphi : \mathbb{N}^n \to \mathbb{Z}^m$.

→ <u>Lema</u>: Si S es un semigrupo f.g. integral, entonces $k[S]$ es una k-álgebra f.g. sin divisores de 0. Luego $X = \mathrm{Spec}(k[S])$ es una var. sobre k.

→ Si S es un semigrupo integral f.g. entonces existe un morfismo sobreyectivo

$$k[t_1,\dots,t_n] \xrightarrow{f} k[S]$$

Prop: El kernel de $f = (t^a - t^b \ / \ a,b \in \mathbb{N}^n,\ \varphi(a) = \varphi(b))$.

Ej: $S = \{ m \in \mathbb{N} : m \neq 1 \} = \langle 2,3 \rangle$
Luego $k[u,v] \to k[S]$ $\quad x^u \mapsto x^2$, $x^v \mapsto x^3$
$\Rightarrow \ker f = (v^3 - v^2)$.

→ Estructura tórica: $X = \operatorname{Spec}(k[S])$. Los puntos cerrados de X corresponde a morfismos

punto cerrado $k[S] \xrightarrow{f} k \quad \Rightarrow \quad \varphi : S \to (k,\cdot)$, $\varphi(u) = f(x^u)$

Queremos definir producto en $\operatorname{Hom}(S,(k,\cdot))$: Si $\varphi,\psi : S \to (k,\cdot)$
$\Rightarrow \varphi.\psi : S \to (k,\cdot)$, $u \mapsto \varphi(u)\cdot\psi(u)$, neutro $\mathbb{1} : S \to (k,\cdot)$
$u \mapsto 1$

Toro: M grupo abeliano libre y f.g. $T = \operatorname{Spec}(k[M]) \simeq (k^*)^n$ (Toro)

El producto que definimos en $\operatorname{Hom}(M,(k,\cdot))$ define una operación de grupo en T.

Def: Sea S semigrupo f.g. integral. Sea $S \hookrightarrow \mathbb{Z}^m$ incrustación.
Definimos S^{gp} como el subgrupo de $\mathbb{Z}^m$ generado por S.

La inclusión $S \hookrightarrow S^{gp}$ morfismo de semigrupos $k[S] \to k[S^{gp}]$
$$\underbrace{\operatorname{Spec}(k[S^{gp}])}_{T} \longrightarrow \underbrace{\operatorname{Spec}(k[S])}_{X}$$

Prop: La inclusión $S \hookrightarrow S^{gp}$ incrusta T como un abierto afín principal de X.

<u>Cor</u>: $\dim X = \mathrm{rk}\, S^{gr}$.

$T \underset{\text{inv}}{\subseteq} X$, $T \times X \to X$ la acción está definida por la operación de semigrupo en $\mathrm{Hom}(S,(k,\cdot))$

$$k[S] \longrightarrow k[S] \otimes k[S^{gr}] \quad , \quad \chi^u \mapsto \chi^u \otimes \chi^u .$$

<u>Def</u>: Dado un semigrupo S integral y f.g., la <u>variedad tórica a S</u> es $X = \mathrm{Spec}(k[S])$, $T = \mathrm{Spec}(k[S^{gr}]) \subset X$.

Ej: $S = \{ m \in \mathbb{N} : m \neq 1 \}$, $S^{gp} = \mathbb{Z}$ $\quad f : k[u,v] \twoheadrightarrow k[S]$

$u \mapsto x^2 \ , \ v \mapsto x^3$

$\ker f = (u^3 - v^2)$

$$X = \mathrm{Spec}(k[S]) \hookrightarrow \mathbb{A}^2_k$$
$$\overset{\cup}{T} = \mathrm{Spec}(k[\mathbb{Z}]) = k^*$$

$X = Z(u^3 - v^2)$ $\quad t \in T$, $(x,y) \in X$ $\quad t \circ (x,y) = (t^2 x, t^3 y)$.

<u>Obs</u>: Sea $\varphi : S \to S'$ morfismo de semigrupos ...

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[r, "g"] \arrow[d] & T \arrow[d] \\ X' \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

g es morfismo de grupos algebraicos y $f(\lambda q) = g(\lambda) f(q)$

Si $f(\lambda \cdot q) = g(\lambda) f(q) \Rightarrow f$ se dice <u>morfismo tórico</u>

tomemos cualquier

→ Semi-grupos vs Var. Tóricas

<u>Def</u>: Sea X una variedad afín, $T \subset X$ abierto un toro tal que la acción de T en sí mismo se extiende a una acción de T en X. Entonces existe un semi-grupo integral f.g. S y un isomorfismo $X \cong \mathrm{Spec}(k[S])$ que induce

$$T \cong \mathrm{Spec}(k[S^{gp}])$$

compatible con la acción.

<u>Dem</u>: $T \cong Spec(k[M])$ M abeliano f.g. libre.
$\therefore$ $\mathcal{O}(X) \subseteq k[M]$. Existe un subconjunto $S \subseteq M$
tal que $\mathcal{O}(X) = \bigoplus_{u \in S} k\chi^u$ (dada por la acción del toro).
Mirar notas de Mircea
$\therefore$ se prueba $S^{gr} = M$.

<u>Prop</u>.- Sean S y S' semigrupos f.g. int., f: $Spec(k[S]) \to Spec(k[S'])$
morf. tórico con su respectivo g: $Spec(k[S^{gr}]) \to Spec(k[S'^{gr}])$
Entonces $\exists!$ morfismo $\varphi: S' \to S$ tal que f es inducido
por φ.

<u>Dem</u>: Mirar Mircea's $\therefore$ Para el $\chi^{u'} \mapsto \sum_{u \in S^{gr}} \alpha_u \chi^u \underset{p.d.}{=} \chi^u$ ...

→ <u>Subvariedades</u>

<u>Def</u>.- Una <u>Cara</u> de un semi-grupo S es un semigrupo F tal que
si $u, v \in S$ son tales que $u+v \in F \Rightarrow u, v \in F$.

<u>Prop</u>: los subvariedades (irred.) invariantes por T en $X = Spec(k[S])$
están en corresp. 1-1 que preserva inclusión que preserva
inclusión con las caras de S.

Ej.- $\mathbb{A}^2 = Spec(k[x_1, x_2])$

(El ideal de la var. corresp. a F es
$$\bigoplus_{u \in S \setminus F} k\chi^u$$