Sels. Etcrović   Resumen: (1)

4-Sept-2015

→ Def: (Saturación) Sea S subsemigrupo de un grupo abeliano libre f.g. L. ~~Sea~~ S es saturado en L si para todo $u \in L$ tal que existe m entero positivo tal que $mu \in S$, se tiene que $u \in S$.
S es saturado si lo es en S^{gp}.

Prop: X asociada a S es normal $\Leftrightarrow$ S es saturado.
" $k[S]$ es integralmente cerrado en $k[S^{gp}]$ "

Def: S semigrupo integral f.g., $S^{sat} = \{u \in S^{gp} : mu \in S$ para algún $m>0\}$ (es saturado) : $S \hookrightarrow S^{sat} \hookrightarrow S^{gp}$

Prop: El morfismo $\mathrm{Spec}(k[S^{sat}]) \to \mathrm{Spec}(k[S])$ es la normalización de $\mathrm{Spec}(k[S])$.

→ Var. tóricas afines suaves

Lema: S semi-grupo saturado $\Rightarrow$ $S \cong S' \times \mathbb{Z}^r$, donde S' es un semigrupo donde el único elemento invertible es 0

Prop: $\mathrm{Spec}(k[S])$ es suave ssi $S \cong \mathbb{Z}^r \times \mathbb{N}^m$.

Geometría convexa: V espacio vectorial f.dim sobre $\mathbb{R}$, U = dual de V.
Estructura integral de V: N = grupo abeliano libre f.g. con inclusiones
$$N \hookrightarrow N_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow N_{\mathbb{R}} = V$$
N es retículo de V, $M = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$, $M \otimes \mathbb{R} = M_{\mathbb{R}}$

Def: $Z \subseteq V$
1) Z es convexo si $\forall z_1, z_2 \in Z$ $\forall \lambda \in [0,1]$, $\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2 \in Z$.

2) Z es cono si $\forall z \in Z$, $\forall \lambda \geq 0$ $\lambda z \in Z$.

3) Envolvente convexa : $\operatorname{conv}(Z) = \bigcap_{\substack{Z \subset C \\ \text{convexo}}} C$.

4) Cono convexo generado $\operatorname{pos}(Z) = \bigcap_{\substack{Z \subset C \\ \text{cono convexo}}} C$

Lema: $\operatorname{conv}(Z) = \{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i \ : \ \lambda_i \geq 0, \ \sum \lambda_i = 1, \ v_i \in Z \}$
$\operatorname{pos}(Z) = \{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i \ : \ \lambda_i \geq 0 \ , v_i \in Z \}$

Def.- Un politopo convexo es la envolvente convexa de un conj. finito.
Un cono convexo poliedral es el cono convexo de un conj. finito.
Estas cosas son racionales si el conj. finito ~~que genera~~ está en N.
Un conjunto convexo σ es puntiagudo si $v, -v \in \sigma \Rightarrow v = 0$.

Lema: Los politopos y los poliedros son cerrados.

→ Subconj. convexos cerrados: Sea $K \subseteq V$ un convexo cerrado.
Un hiperplano soportante es un hiperplano afín H en V tal que $K \cap H \neq \phi$ y K está contenido en uno de los semiespacios definidos por H. Una cara de K es la intersección $K \cap H$.

Apriori: ϕ y K no son caras. Pero a veces se consid. como caras impropias.

Prop: Un conjunto $K \subseteq V$ convexo cerrado es la intersección de sus semiespacios de ~~de sus~~ hiperplanos soportantes.

Def.- $\dim(K)$ es la dim del espacio afín (traslación de un subespacio vectorial) generado por K.

Def.- Un vértice de K es una cara 0-dim de K. Una cara maximal es una cara de codim 1.

<u>Lema</u>: la intersección finita de caras de K es cara o $\emptyset$.

→ Cono convexo poliedral. Sea σ un cono convexo en V. Un semiespacio de un hiperplano soportante de σ es de la forma

$$\{ v \in V \,/\, \langle u, v \rangle \geq a \}$$

para algún $u \in U$ = dual de V y $a \in \mathbb{R}$ (pero en verdad $a = 0$)

→ El <u>cono dual</u> de σ es $\sigma^{\vee} := \{ u \in U \,/\, \langle u, v \rangle \geq 0 \;\; \forall v \in \sigma \}$
Es un cono convexo cerrado en U.

<u>Prop</u>: σ cono convexo cerrado $\Rightarrow (\sigma^{\vee})^{\vee} = \sigma$.

→ Supongamos que σ es poliedral con $v_1, .., v_r$ generadores.
Sea τ una cara de $\sigma \Rightarrow \tau$ es el cono convexo gen por los v_i están en τ.

<u>Lema</u>: σ = cono poliedral tal que $V = \mathrm{Span}(\sigma)$. Entonces la <u>frontera</u> $\partial\sigma$ de σ es la unión de sus caras. Además $\sigma = \overline{\sigma^{\circ}}$.

(Farkas) Si σ es un poliedro $\Rightarrow \sigma^{\vee}$ también.

Conos y Semigrupos: σ poliedro racional, $V = N_{\mathbb{R}}$, $S := \sigma \cap N$

<u>Prop</u> 1 - (Gordan) S es un semigrupo f.g.

<u>dem</u>:
- Sean $v_1, \ldots, v_r \in N$ gen. de σ.
- $K = \{ \sum \lambda_i v_i \,/\, \lambda_i \in [0,1] \}$
- K es compacto
- N es discreto

$\Rightarrow N \cap K$ es finito $\{w_1, .., w_s\}$ no vacío.

$\therefore$ $N \cap K$ son los generadores ∎

Lema: Si $V = \operatorname{span}\sigma \Rightarrow S^{gp} = N$.

Prop. Sea $\mathbb{R}_+ S$ el cono convexo generado por S. La asignación $S \to \mathbb{R}_+ S$ da una biyección que preserva inclusión entre los sub semigrupos de N f.g. saturados en N y los conos convexos poliedrales racionales en V. La inversa es $\sigma \mapsto \sigma \cap N$. Además, $S^{gp} = N \Leftrightarrow V = \operatorname{span}(\sigma)$

Cor. La biyección induce una biyección entre las caras de σ y $S = \sigma \cap N$.

→ S subsemigr. de N, $S^\vee := \{u \in M \mid \langle u, v\rangle \geq 0 \ \forall u \in S\}$
Si S es f.g. y saturado en $N \Rightarrow S^\vee$ lo es.
Si $S = \sigma \cap N \Rightarrow S^\vee = \sigma^\vee \cap M$.

Def. S semigr. f.g. sin elementos invertibles no nulos $\Rightarrow$ v es irreducible si siempre que $v_1 + v_2 = v$ se tiene que $v_1 = 0 \vee v_2 = 0$.

Obs. En este caso existe un único elemento minimal de generadores de S que consiste de irreducibles (Base de Hilbert).