Singularidades de var. tóricas

→ N = grupo libre abeliano fin. generado , $N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$
M = dual de N y $M_{\mathbb{R}}$ = dual de $N_{\mathbb{R}}$.

σ = cono convexo poliedral racional $\subset N_{\mathbb{R}}$ (diremos en esta situación un CONO)
Asumir σ es puntiagudo, entonces

$$S_\sigma := M \cap \sigma^\vee$$

es integral, f.g. semigrupo, saturado tal que $(S_\sigma)^{gr} = M$. puntiagudo
sea $U_\sigma = \mathrm{Spec}(k[S_\sigma]) \supset T_N = \mathrm{Spec}(k[M])$.

obs) Si $W = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(\sigma) \Rightarrow N' = N \cap W$ es un reticulado con $N'_{\mathbb{R}} = W$, tal que N/N' es libre de torsión. ~~se elige~~ tomamos $N' \hookrightarrow N$ y si $\sigma' = \sigma$ pero en $W \Rightarrow U_\sigma \simeq U_{\sigma'} \times (k^*)^{n-n'}$ con n = rango(N) y n' = rango(N').

∴ se supondrá que $N_{\mathbb{R}} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(\sigma)$.

→ vimos que si $u_1, \dots, u_m$ es un conj. minimal de generadores de S_σ, entonces:

(•) $k[t_1, \dots, t_m] \twoheadrightarrow k[S]$, $I = \ker = \langle t^a - t^b : \sum a_i u_i = \sum b_i u_i \quad a_i b_i = 0 \ \forall i \rangle$

(•) Luego $I \subset (t_1, \dots, t_m)$ pero minimalidad de $I \subset (t_1, \dots, t_m)^2$.

(•) Luego $\dim_k \{$tangente de U_σ en $(0,\dots,0)\} = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = m$

(•) Luego U_σ suave ⇒ suave en ese punto ⇒ $\dim N_{\mathbb{R}} = m$ = # mínimo de generadores = $\dim_k \{$tangente U_σ en $(0,\dots,0)\}$ ⇒ No puede haber relación (sino cortaría $\mathbb{A}^m$) ⇒ $U_\sigma \simeq \mathbb{A}^m$ (σ es puntiagudo).

¿Qué tenemos en los otros casos para Spec $k[S_\sigma]$?

I. Son Cohen-Macaulay.

II. Singularidades son racionales.

III. bajo cierta restricción en car k, toda variedad tórica afín es el cociente de una var. nosingular por $(k^*)^m$ × grupo finito abeliano.

I y II son resultados que no tocaré (ver notas Micea). Pero defino:

(I) Un anillo con local Noetheriano (R, m) se dice Cohen-Macaulay si existe sucesión regular en m de largo $= \dim(R)$. (ie, $m_1, \dots, m_n$ tal que m_i no es div de cero en $R/(m_1, \dots, m_{i-1})$. En general, $n \leq \dim R$). Un esquema es Cohen-Macaulay si todos sus anillos locales lo son.

(Ej: suave, Artin, Normal y dim 2 ; NO $k[[x,y]]/(x^2, xy)$ dim 1 pero todo es div cero)

(II) Una resolución de singularidades de una var. X es un morfismo birracional y propio $X' \xrightarrow{\pi} X$ con X' nosingular. La Variedad X tiene sing. racionales si $\exists$ tal resolución con $\pi_* \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_X$ y $R^i \pi_* \mathcal{O}_{X'} = 0$ $\forall i > 0$. (Dado π, el $\pi_* \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_X \iff X =$ normal).

[Car $k > 0$ se comporta mal: una resol basta, $\exists$ resol. ; Char 0 es OK]

[Car $= 0$ y sing racional $\Rightarrow$ cohen-Macaulay]

→ Variedades tóricas afines como cocientes.

- Sea $A =$ grupo abeliano f. g. $\simeq \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}/m_1 \times \dots \times \mathbb{Z}/m_r$, $m_i \geq 2$ enteros. Sea $G = \operatorname{Spec} k[A] \Rightarrow$ (Tarea) $G \simeq (k^*)^d \times \prod_{i=1}^{r} \operatorname{Spec} k[t]/(t^{m_i} - 1)$.
  $\therefore$ G reducido $\iff \operatorname{car}(k) \nmid m_i$ para cada i. Lo asumimos.

- Sea $U_\sigma =$ Var. tórica afín correspondiente a un cono puntiagudo $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$. Sea $T_N \subseteq U_\sigma$ el toro.

- Tenemos una acción tórica de G en U_σ si $\exists$ morfismo de grupos algebraicos $G \to T_N$ induciendo una acción de G en U_σ.

obs/- Un tal G es linealmente reductivo (ie $\forall$ representación $G \to GL(V)$ con V dim finita, $\exists$ $V \xrightarrow{p} V^G$ tal que $p(g(v)) = p(v)$ y $p|_{V^G} = 1\!\!1_{V^G}$ (si $\exists$ es único)) (En efecto, en este caso la acción es diagonalizable). Luego, si G actua algebraicamente en X afín

(ie, $G \curvearrowright \mathcal{O}(X)$) $\Rightarrow \mathcal{O}(X) = \bigcup V_i$ con V_i dim finita e inv. por G
finito
$\Rightarrow V_i \xrightarrow{alg} V_i^G \ \forall i \Rightarrow \rho_X : \mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathcal{O}(X)^G$ con $\rho_X|_{\mathcal{O}(X)^G} = 1\!\!1_{\mathcal{O}(X)^G}$
descom. isotópica
y morfismo de $\mathcal{O}(X)^G$-modulos. RAYNOLDS

$\therefore$ $\mathcal{O}(X)^G \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$ nos da $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}(X)) = X \xrightarrow{\pi} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}(X)^G) = X/\!/G$
f.g. k-subalgebra
<u>cociente categórico</u> ie $\pi(g(x)) = \pi(x)$ $\forall g \in G$ $\forall x \in X$ y si $p : X \to Y$ es G-invariante, Y = variedad, $\exists!\ g : X/\!/G \to Y$, $g\pi = p$.

<u>obs</u>: $\mathbb{C}^2 \curvearrowleft \mathbb{C}^*$ con $(x,y) \mapsto (tx, ty) \Rightarrow \mathbb{C}[x,y]^{\mathbb{C}^*} = \mathbb{C}$ y $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[x,y] \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}^2/\mathbb{C}^* = pt$
ya que clausura de órbitas incluyen un mismo punto: $(0,0)$.
El cociente <u>NO</u> representa a las órbitas. Al contrario de $(x,y) \mapsto (tx, t^{-1}y)$
$\Rightarrow \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2/\mathbb{C}^* = \mathbb{C}$, y representa órbitas ... excepto por $(0,0)$ y $(xy=0)$.
En general, $\pi(x) = \pi(y) \iff \overline{Gx} \cap \overline{Gy} \neq \emptyset$.
En efecto, $X/\!/G$ representa órbitas (con top. cociente) $\iff$ toda órbita es cerrada. (se llama <u>Cociente Geométrico</u>)

<u>Prop</u>: Si G tiene una acción tórica sobre $U_\sigma \Rightarrow U_\sigma/\!/G$ tiene una estructura natural de variedad tórica afín.

<u>Dem</u>: • Por definición, una acción tórica de $G \xrightarrow{p'} T_N$ está dada por

$$\begin{tikzcd}
k[A] \otimes_k k[A] & k[A] \arrow[l] \\
\chi^a \otimes \chi^a & \chi^a \arrow[l, mapsto] \\
k[M] \otimes_k k[M] \arrow[uu, "p' \otimes p'"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] & k[M] \arrow[l] \arrow[uu, "p''"'] \\
\chi^u \otimes \chi^u & \chi^u \arrow[l, mapsto]
\end{tikzcd}$$

y al igual que antes, se deduce que existe $p : M \to A$ morfismo induciendo $k[M] \xrightarrow{p''} k[A]$, y así

$$\Phi : k[S_\sigma] \longrightarrow k[A] \otimes_k k[S_\sigma], \quad \Phi(\chi^u) = \chi^{p(u)} \otimes \chi^u$$

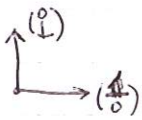
• Una función $f \in \mathcal{O}(U_\sigma)$ está en $\mathcal{O}(U_\sigma)^G \iff$

$$\begin{tikzcd} G \times \mathcal{U}_\sigma \arrow[r, "\text{acción}"] \arrow[d, "pr_2"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{U}_\sigma \arrow[d, "f"] \\ \mathcal{U}_\sigma \arrow[r, "f"'] & \mathbb{A}^1_k \ (\acute{o}\ k) \end{tikzcd} \iff \Phi(f) = 1 \otimes f \in k[A] \otimes k[S_\sigma] \quad (*)$$

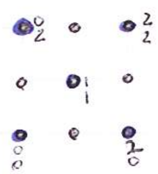
Si $f = \sum_{u \in S_\sigma} c_u \chi^u \Rightarrow (*)$ es $\sum_u c_u \chi^{p(u)} \otimes \chi^u = \sum_u c_u (1 \otimes \chi^u)$

$\therefore\ f \in \mathcal{O}(\mathcal{U}_\sigma)^G \iff c_u = 0$ si $u \notin L = \ker(p) \Rightarrow \boxed{\mathcal{O}(\mathcal{U}_\sigma)^G = k[S_\sigma \cap L]}$

- Ahora $L \hookrightarrow M$ induce $N \longrightarrow L^* = \mathrm{Hom}(L, \mathbb{Z})$ y si τ es la imagen de σ en $L^*_{\mathbb{R}} \Rightarrow S_\sigma \cap L = \tau^{\vee_{\mathbb{Z}}} \cap L$. (notar que el grupo asociado puede $\subsetneq A$)
- Así $S_\sigma \cap L$ es finitamente generado, integral, saturado $\Rightarrow \mathcal{U}_\sigma /\!/ G = \mathrm{Spec}(k[\tau^\vee \cap L])$ es var. tórica ∎

__Ej__: $M =$  $\xrightarrow{p} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = A$, $\chi^{\binom{0}{1}} \mapsto 1$, $\chi^{\binom{1}{0}} \mapsto 1$

$\Rightarrow L = \ker(p) = \{ \binom{m}{n} \in \mathbb{Z}^2 : m+n$ es par $\}$

$\Rightarrow$  $= L \cap S_\sigma$ y $\mathbb{A}^2 /\!/ G \simeq \mathrm{Spec}(k[L \cap \mathbb{N}^2])$

(en general, $v_1, \dots, v_n \mapsto a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}/m$ etc)

→ Sea $\mathcal{U}_\sigma$ con σ tal que genera $N_{\mathbb{R}}$.

→ Si $\tau_1, \dots, \tau_d$ son rayos de $\sigma \Rightarrow$ sea v_i generador de $\tau_i \cap N \simeq \mathbb{N}$. Como $\langle v_i \rangle_{\mathbb{R}} = N_{\mathbb{R}}$, tenemos $i : M \hookrightarrow \mathbb{Z}^d$, $i(u) = (\langle u, v_1 \rangle, \dots, \langle u, v_d \rangle)$ inyectiva.

→ Sea $p : \mathbb{Z}^d \to A = \mathrm{coker}(i)$ y $G = \mathrm{Spec}(k[A])$. (Asumir char $k \nmid |\mathrm{tors}(A)|$, así G es reducido.) Luego p induce $G \hookrightarrow (k^*)^d$ y así tenemos una acción efectiva de $G \curvearrowright \mathbb{A}^d$ (no kernel). La acción es: si $\phi : A \to k^*$ corresponde a un punto de $G \Rightarrow \phi \cdot (x_1, \dots, x_d) = (\phi(p(e_1)) x_1, \dots, \phi(p(e_d)) x_d)$.

__Cor__: $\mathcal{U}_\sigma \simeq \mathbb{A}^d /\!/ G$. $(\underbrace{L = M}_{\text{antiguo}} = \ker(d))$

__obs__: Prop y Cor son verdad sin asumir char $k \nmid |\mathrm{tors}(A)|$: Se define $X /\!/ G = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}(X)^G)$ con $f \in \mathcal{O}(X)^G \iff$ el diagrama arriba es conm.

Obs: $N_{\mathbb{R}}$ no es el span de $\sigma \Rightarrow U_\sigma \simeq U_{\sigma'} \times (k^*)^r$
y $G \curvearrowright \underbrace{\mathbb{A}^d}_{\text{antes}} \times \underbrace{(k^*)^r}_{\text{trivial}}$.

Dado $N = \langle u_1, u_2 \rangle$
y $b = au_1 + bu_2$
$(a,b)=1$
$\Rightarrow \exists\, a'a + bb' = 1$
$\begin{pmatrix} a & -b' \\ b & a' \end{pmatrix}$ cambio base

Defn: U_σ es SIMPLICIAL si σ es generado por vectores l.i.
En este caso, G es finito y $U_\sigma \simeq \mathbb{A}^d/G$ literalmente.
Así U_σ tiene sing cociente.

Prop: Si $U_\sigma \simeq \mathbb{A}^d \times (k^*)^r // G \Rightarrow$ es cociente geométrico $\Leftrightarrow \sigma$ es simplicial.

dem: coc. geom $\Leftrightarrow$ órbitas son cerradas. Asumimos $r=0$. Si U_σ simplicial $\Rightarrow G$ finito $\Rightarrow$ órbitas conj finito y así cerrado. Si U_σ no simplicial $\Rightarrow d > n = \text{rango}(N)$. Notar que $(0,\dots,0) \in \mathbb{A}^d$ está fijo por G. $\mathbb{A}^d \xrightarrow{\pi} U_\sigma$ es geométrico $\Rightarrow$ todos las fibras son las órbitas y tiene una cero dimensional $\Rightarrow$ genericamente fibras cero dim $\Rightarrow d = \dim U_\sigma = n$ $\rightarrow\leftarrow$

e_2 dejo
↑
elegir
$\pm$ dejo

(Obs: la acción en U_σ simplicial es libre $\Leftrightarrow G$ es trivial $\Leftrightarrow U_\sigma$ es suave)

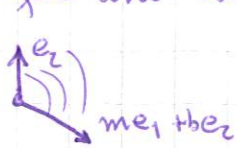
→ **Ej1**: Si $\text{rango}(N) = 1 \Rightarrow \sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ puntiagudo $\Rightarrow U_\sigma \simeq \mathbb{A}^1$ o k^*

→ **Ej2**: Si $\text{rango}(N) = 2$, σ puntiagudo y $\underset{\text{simplicial}}{\text{dim máx}}$. Sea e_1, e_2 base de $N \Rightarrow$ podemos asumir que σ está generado por e_2 y $me_1 - le_2$ con $0 < l < m$, $(l,m) = 1$:

- $\sigma = \langle v_1, v_2 \rangle \subseteq N_{\mathbb{R}}$, donde $v_1, v_2 \in N$ y son base

- Así podemos tomar que uno sea e_2 y el otro $me_1 + be_2$
$m > 0$ y $b \in \mathbb{Z}$

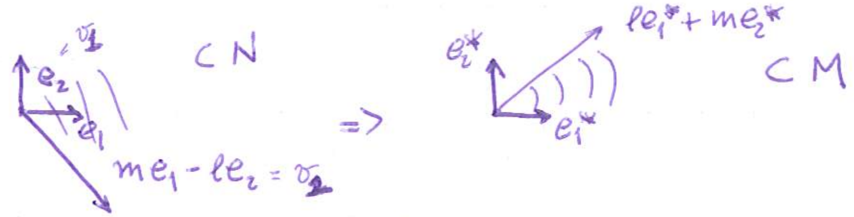
(v_2 primitivo y sacar en e_1 $N/\langle v_2 \rangle$)



si reempl. e_1 por $e_1' = e_1 + ce_2$, $c \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow$
$me_1 + le_2 = me_1' + (b - mc)e_2$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix}$

$\therefore$ b puede ser modificado arbitr. módulo m, así asumimos $b = -l$, $0 \le l < m$

$\therefore$ σ generado por e_2, $me_1 - le_2$. U_σ singular $\Leftrightarrow l > 0$.
$(m,l) = 1$ ya que es primitivo.



- Sean $x = \chi^{e_1^*}$, $y = \chi^{e_2^*}$ $\Rightarrow$ $k[S_\sigma] = \bigoplus k x^i y^j$, $0 \leq mi - lj$.
  $\langle (u, v_1), (u, v_2) \rangle$

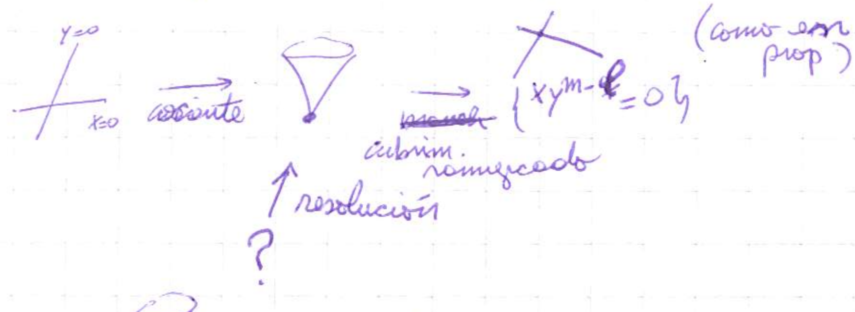
- Si $i : M \hookrightarrow \mathbb{Z}^2$ $i(e_1^*) = (0, m)$ y $i(e_2^*) = (1, -l)$ $\Rightarrow$ $p : \mathbb{Z}^2 \to A = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$
  $p(a,b) = la + b$ ✓(exponentes). Asumiendo char $k \nmid m$ $\Rightarrow$ $G \equiv \langle \mu_m \rangle$ y
  $\eta \cdot (t_1, t_2) = (\eta^l t_1, \eta t_2)$
  y $U_\sigma = \mathbb{A}^2 / G$.

Ej: si $l = 1$ ~~[illegible]~~
$\Rightarrow$ pol. inv. $t_1^m, t_1^{m-1} t_2, \dots, t_1 t_2^{m-1}, t_2^m$ y generan
$\Rightarrow$ $U_\sigma \simeq$ cono afín sobre la curva racional normal en $\mathbb{P}^m$

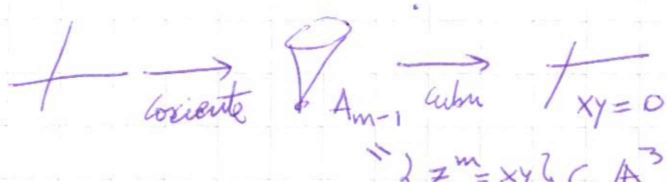
Ej: si $l = m-1$ $\Rightarrow$ $\eta(t_1, t_2) = (\eta^{-1} t_1, \eta t_2)$ y $t_1^m, t_2^m, t_1 t_2$ son base con relación $(t_1 t_2)^m = t_1^m \cdot t_2^m$
$\Rightarrow$ $U_\sigma \simeq k[u,v,w]/(uw - v^m)$, A_{m-1}-singularidad.

- Desde ese punto de vista: $k[x^m, y^m] \subset k[x,y]^{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}^{(1,l)}} \subset k[x,y]$
  con $(x,y) \mapsto (\mu x, \mu^l y)$

$\Rightarrow$ $\operatorname{Spec} k[x,y] = \mathbb{A}^2 \xrightarrow{m:1} \operatorname{Spec} \quad = U_\sigma \xrightarrow{m:1} \operatorname{Spec}[x^m, y^m] = \mathbb{A}^2 = U_\sigma / G$



Ej: $l = m-1$ $\Rightarrow$



y resolución, etc...