José Yáñez

objetivos:

I: Definición
II: Morfismos
III: Órbitas y subvariedades
IV: Propiedades entre ellos.

Def: Sea N un reticulado. Un fan Δ es una colección finita de conos puntiagudos en $N_{\mathbb{R}}$ tales que:

1) Cada cara de un cono en Δ es un cono en Δ
2) La intersección de dos conos en Δ es una cara de ambos.

Para cada $\sigma \in \Delta$ tenemos una variedad tórica afín $U_\sigma = \mathrm{Spec}(k[S_\sigma])$ $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$. Si τ es una cara de σ, entonces la inclusión $\sigma^\vee \subseteq \tau^\vee$ nos induce un morfismo $U_\tau \to U_\sigma$.

Resultado: Para toda cara τ de σ, existe un $u \in \sigma^\vee \cap M$ tal que $\tau = \sigma \cap u^\perp$
Podemos identificar U_τ como el abierto principal dado por χ^u en U_σ
Dados τ_1, τ_2 dos caras de σ $\Rightarrow$ $U_{\tau_1} \cap U_{\tau_2} = U_{\tau_1 \cap \tau_2}$, $\tau_1 = \sigma^\vee \cap u_1^\perp$, $\tau_2 = \sigma^\vee \cap u_2^\perp$
$\Rightarrow$ $\tau_1 \cap \tau_2 = \sigma^\vee \cap (u_1 + u_2)^\perp$.

Si tomamos $\sigma_1, \sigma_2 \in \Delta$, tenemos que $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \tau$ es una cara de ambos.
Si tomamos tres conos, las identificaciones son compatibles.

Def: $X = X(\Delta)$ es la variedad ~~tórica~~ asociada a Δ, dada por la unión de los U_σ, $\sigma \in \Delta$, con el pegado anterior

Podemos ver que $T_N = U_{\{0\}}$ está incrustado en cada uno de los U_σ y además la acción es compatible con la inclusión.

Def: $X(\Delta)$ var. tórica asociada a Δ, es $X(\Delta)$ con la acción de T_N y la inmersión $T_N \subset X$.

Prop: $X(\Delta)$ es separable para todo fan Δ.

Resultado: si $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$, entonces $S_\tau = S_{\sigma_1} + S_{\sigma_2}$.

Dem: Necesitamos $X \to X \times X$ es cerrado. Nos basta ver el resultado para $U_{\sigma_1 \cap \sigma_2} \to U_{\sigma_1} \times U_{\sigma_2}$, ie, $k[S_{\sigma_1}] \otimes_k k[S_{\sigma_2}] \to k[S_{\sigma_1 \cap \sigma_2}]$ es sobre
$\chi^{u_1} \otimes_k \chi^{u_2} \longrightarrow \chi^{u_1}\chi^{u_2} = \chi^{u_1+u_2}$ ■

Morfismos: Sea $\phi: N' \to N$ un homomorfismo de retículados. Si Δ', Δ son fans en N', N resp.; ϕ es un morfismo de fans si $\forall \sigma' \in \Delta'$ existe un $\sigma \in \Delta$ tal que $\phi(\sigma') \subset \sigma$.

Si tenemos un morfismo de fans, entonces para todo $\sigma' \in \Delta'$, $\sigma \in \Delta$ tal que $\phi(\sigma') \subset \sigma$ tenemos el siguiente morfismo de k-álgebras:

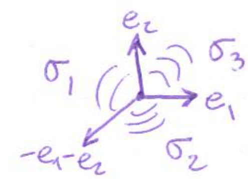
$$k[\sigma^\vee \cap M] \longrightarrow k[\sigma'^\vee \cap M'] \quad , \quad \chi^u \mapsto \chi^{\phi^*(u)}$$

esto induce un morfismo $U_{\sigma'} \to U_\sigma$. Entonces tengo morfismo $U_{\sigma'} \to X(\Delta)$ y podemos pegarlos para obtener $\phi_*: X(\Delta') \to X(\Delta)$.

obs/. Si σ', σ son los conos $\{0\}$, entonces ϕ_* se restringe al morfismo de grupos algebraicos $T_{N'} \to T_N$.

Def/. Si $f: X(\Delta') \to X(\Delta)$ es un morfismo que induce un morfismo de grupos en los toros, y es compatible con la acción, entonces decimos que f es un morfismo de var. tóricas.

Ej.1: Tomamos $N = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$



$\sigma_1^\vee \cap M = \{ f : \sigma_1 \to \mathbb{Z} \}$

$k[\sigma_1^\vee \cap M] = k\left[\frac{t_2}{t_1}, \frac{t_3}{t_1}\right]$, $t_i = \chi^{e_i^*}$. $\therefore$ identificamos con $\mathbb{A}^2_k$

Órbitas y subvariedad: Sea σ un cono en $N_{\mathbb{R}}$ de rango n y sea U_σ la var. tórica afín. Las órbitas de la acción de T_N están en correspondencia con las caras de $\sigma^\vee \cap M$, y son puntos.

Cada cara de S_σ es de la forma $\sigma^\vee \cap \tau^\perp \cap M$, para alguna cara τ de σ, y el grupo generado es $\tau^\perp \cap M$.

$\therefore$ La órbita correspondiente a la cara τ de σ es $O_\tau = \mathrm{Spec}(k[\tau^\perp \cap M])$

Si identificamos los puntos cerrados de U_σ con el conjunto de morfismos de semigrupos $\varphi : \sigma^\vee \cap M \to k$, entonces $O_\tau = \{ \varphi : \varphi^{-1}(k^*) = \sigma^\vee \cap \tau^\vee \cap M \}$

A nivel de k-álgebras la inclusión $O_\tau \subseteq U_\sigma$ es inducida por

$$k[\sigma^\vee \cap M] \to k[\tau^\perp \cap M], \quad \chi^u \mapsto \begin{cases} \chi^u & \text{si } u \in \sigma^\vee \cap \tau^\perp \cap M \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Las subvariedades invariantes son $V(\tau) := \overline{O_\tau} = \mathrm{Spec}(k[\sigma^\vee \cap \tau^\perp \cap M])$

Prop: Tenemos las siguientes relaciones entre U_σ, O_τ, $V(\tau)$

(1) $U_\sigma = \coprod_{\tau \leq \sigma} O_\tau$ (2) $V(\tau) = \coprod_{\tau' \geq \tau} O_{\tau'}$

Si Δ es fan en N, y tomamos $X(\Delta)$, entonces si $\tau \leq \sigma \in \Delta$ tenemos una inmersión $O_\tau \subseteq X(\Delta)$ independiente del cono σ, y definimos $V(\tau) = \overline{O_\tau}$ en $X(\Delta)$.

(1) y (2) siguen siendo válido en $X(\Delta)$. También $X(\Delta) = \coprod_{\tau \in \Delta} O_\tau$.

Las subvariedades $V(\tau)$ son también varied. tóricas con toro O_τ.
El fan que los describe es la proyección de los conos que contienen a τ, con $p : N \to N/\langle N \cap \tau \rangle$.

Llamamos x_τ al punto distinguido: Si τ es una cara de σ, entonces $x_\tau \in U_\sigma$ y está dado por $x_\tau : \sigma^\vee \cap M \to k$, $x_\tau = \begin{cases} 0 & \text{si } u \notin \tau^\perp \\ 1 & \text{e.o.c.} \end{cases}$

En $\mathbb{P}^2$, por ejemplo, son $[0,1,0]$ para σ_2, $[0,0,1]$ σ_3, $[1,0,0]$ σ_1.
para v_3 $[1:1:0]$, v_2 $[1:0:1]$, v_1 $[0:1:1]$, 0 $[1,1,1]$.

<u>Prop</u>: Δ', Δ fans en N', N resp. $\phi : N' \to N$ morfismo de fans $\phi_* : X(\Delta') \to X(\Delta)$. Si τ' cono de Δ' y τ el menor cono tal que $\phi(\tau') \subset \tau$. Entonces $\phi_*(x_{\tau'}) = x_\tau$.
así $\phi_*(O_{\tau'}) \subseteq O_\tau$ y $\phi_*(V(\tau')) = V(\tau)$.