Abanicos y Variedades Tóricas II

Troncoso

→ Subgrupos a un parámetro. Dado $X(\Delta)$ asociado a (Δ, N), para cada $v \in N$, Sea $f_v : \underset{\mathrm{Spec}(k[\mathbb{Z}])}{k^*} \longrightarrow T_N = T$

tq $f_v = (\phi_v)_*$ donde $\phi_v : \mathbb{Z} \to N$, $1 \mapsto v$.

$\{ f_v \,/\, v \in N \}$ subgrupos a un parámetro

ie, $N = \mathbb{Z}^n$, $v \in \mathbb{Z}^n$; $f_v : k^* \longrightarrow T$, $t \mapsto t^v = (t^{v_1}, t^{v_2}, \dots, t^{v_n})$

→ Prop/- (Muy útil) Dado $X(\Delta)$ la variedad tórica asociada a (N, Δ), el subgrupo a un parámetro $f_v : k^* \to T = T_N$ se puede extender como $\tilde{f}_v : \mathbb{A}^1 \to X(\Delta)$ ssi $v \in |\Delta|$. Aun más, de ser así, si $\sigma \in \Delta$ es el más pequeño tq $v \in \sigma \Rightarrow \tilde{f}_v(0) = x_\sigma$

Dem/- Supongamos que $\tilde{f}_v$ existe y $\tilde{f}_v(0) \in U_\sigma$, como $T \subset U_\sigma$ $\Rightarrow \tilde{f}_v(\mathbb{A}^1) \subseteq U_\sigma$ ∴ $\tilde{f}_v : \mathbb{A}^1 \to U_\sigma$. traduciendo en k álg

$$\begin{array}{ccc} k[M] & \xrightarrow{\hat{\alpha}} & k[\mathbb{Z}] \\ \uparrow & & \uparrow \\ k[\sigma^\vee \cap M] & \xrightarrow{\exists} & k[\mathbb{N}] \end{array}$$

donde $\alpha(\chi^u) = t^{\langle u, v\rangle}$

sii $\alpha(\chi^u) \in k[\mathbb{N}]$ $\forall u \in \sigma^\vee \cap M$ sii $\langle u, v \rangle \geq 0$ sii $v \in \sigma$

sii $\underline{v \in |\Delta|}$.

- Si σ es el menor cono en Δ tal que tiene a v $\Rightarrow$ v está en el interior de σ (σ°).

Tomando $u \in \sigma^\vee \cap \sigma^\perp$ $\alpha(\chi^u) \in k[\mathbb{N}]$. Sea I el ideal degenerado a $\tilde{f}_v(0)$. ∴ $\tilde{f}(0) = x_\sigma$.

Cor : $\tau \leq \sigma$, conos puntiagudos en $N_{\mathbb{R}}$
$\Rightarrow$ El morfismo inducido $g : U_\tau \to U_\sigma$
es una inmersión abierta sii τ es cara de σ.

dem/ $\Leftarrow$) charla pasada $\Rightarrow$) ahora (recordar que : τ es cara de σ si $v_1, v_2 \in \sigma \cap N$ tal que $v_1 + v_2 \in \tau \Rightarrow v_1, v_2 \in \tau$)

Sean $f_{v_1}, f_{v_2}, f_{v_1+v_2}$ y sus extensiones
$\Rightarrow$ $\tilde{f}_{v_1}, \tilde{f}_{v_2}, \tilde{f}_{v_1+v_2} : \mathbb{A}^1 \to U_\sigma$ T extiende la operación
$f_{v_1} \cdot f_{v_2} = f_{v_1+v_2}$

$\Rightarrow \tilde{f}_{v_1}(0) \cdot \tilde{f}_{v_2}(0) = \tilde{f}_{v_1+v_2}(0) \Rightarrow \tilde{f}_{v_1+v_2}(0) \in g(U_\tau)$
$\Rightarrow \tilde{f}_{v_1}(0), \tilde{f}_{v_2}(0) \in g(U_\tau) \Rightarrow v_1, v_2 \in \tau$.

→ Prop/ Sean Δ, Δ', fanes asociados a N, N' y sea $\phi : N' \to N$.
y sea $\phi : N' \to N$ morfismo de fans

$$\Rightarrow \phi_* : X(\Delta') \to X(\Delta) \text{ propio ssi } \phi^{-1}(|\Delta|) = |\Delta'|.$$

(Como ϕ es morfismo de fan $\Rightarrow \phi(|\Delta'|) \subseteq |\Delta|$)

dem : Basta probar $\phi^{-1}(|\Delta|) \subseteq |\Delta'|$
$\Leftarrow$) Usar 2 lemas en la guía
$\Rightarrow$) sea $v' \in \phi^{-1}(|\Delta|) \cap N'$. Consideremos $v = \phi(v')$ y sus $f_v, f_{v'}$ subgrupos a 1-param. asoc.. Usando criterio de propios $\Rightarrow v' \in |\Delta'|$ por lo anterior ▪

Teo : (Sumihiro) Sea X una variedad normal, con T actuando sobre X $\Rightarrow$ para todo $x \in X$, existe una vecindad afín de ~~x~~ x, que es estable por la acción de T.

Teo: Sea X var. normal separada con una inmersión abierta de un toro T tal que la acción del toro se extiende a X
$\Rightarrow \exists (\Delta, N)$ tal que $X \simeq X(\Delta)$ y se extiende a un isom. $T \simeq T_N$.

Dem: . Por Sumihiro, X tiene un cubri abierto afín $U_1, \dots, U_r$ tq U_i estable por T

- Como $T \cap U_i \neq \emptyset$, $\forall i \Rightarrow \exists u_i \in U_i$ tq $u_i \in T$
luego $(t u_i) u_i^{-1} \in U_i$ ie $T \subseteq U_i$ $\forall i$
- Tomemos $N = \mathrm{Hom}(k^*, T)$, luego $T \simeq T_N$.
- Ahora para cada afín U_i (cap. 1), existe S_i semigrupo en $M = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ tal que $S_i^{gr} = M$,
y como $T_N \subseteq U_i$, $\mathcal{O}(U_i) = k[S_i]$.
- Como X normal, cada S_i saturado $\Rightarrow \exists \sigma_i \in N_{\mathbb{R}}$ tq
$S_i = \sigma_i^\vee \cap M$. Identificamos $U_i = U_{\sigma_i}$.
- Como X separado $U_i \cap U_j$ es afín. Haciendo lo mismo
Hallamos $\tau_{i,j}$ tal que
$$\mathcal{O}(U_i \cap U_j) = k[\tau_{i,j}^\vee \cap M]$$
dado que $\mathcal{O}(U_i)\mathcal{O}(U_j) \subseteq \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$
$\Rightarrow \tau_{i,j} \subseteq \sigma_i \cap \sigma_j$. tomando $\tilde{f}_v' : \mathbb{A}^1 \to U_i$, $\tilde{f}_v'' : \mathbb{A}^1 \to U_j$
como X separado $\Rightarrow$ ambos coinciden en la imagen diagonal $U_{i,j}$ $\Rightarrow v \in \tau_{i,j} \Rightarrow \sigma_i \cap \sigma_j = \tau_{i,j}$
$\therefore$ $\tau_{i,j}$ cara de σ_i y σ_j $\Rightarrow \{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$ fan ~~y~~ $X = X(\Delta)$

Teo (2): Sean Δ y Δ' fanes asociados a N y N'
$\Rightarrow \forall h : X(\Delta') \to X(\Delta)$ morfismo de tóricas
que respeta las acciones $\exists!\ \phi : N' \to N$
morfismo de fanes tal que $\phi_* = h$.

Dem.

- Como h es tórico, este induce un $g : T_{N'} \longrightarrow T_N$ tal que
  $\exists!\ \phi : N' \to N$ y $g = \phi_*$. Como coincide con h en denso abierto
  $\Rightarrow$ solo debemos probar que $\forall \sigma' \in N'$, $\phi(\sigma') \subseteq \sigma$
  $\forall \sigma \in N$
- Dada la orbita $O_{\sigma'}$, $\exists \sigma \in \Delta$ tq $h(O_{\sigma'}) \subseteq O_\sigma$
- Tomemos $v' \in \sigma'$, $f_{v'}$ extendemos $f_{v'}$ y tal que
  $\tilde{f}_{v'}(0) = x_{\sigma'}$
- de otro lado $g \circ f_{v'} = f_{\phi(v')} \Rightarrow$ podemos extender.
  $h \circ f_{v'} : A' \to X(\Delta) \Rightarrow \phi(v') \in |\Delta|$ y si $h(\tilde{f}_{v'}(0)) = x_\tau$
  con τ el más chico en Δ que tiene a $\phi(v')$
  pero $h(x_{\sigma'}) \in O_\sigma \Rightarrow x_\tau \in O_\sigma \Rightarrow O_\tau \subset O_\sigma \Rightarrow \sigma \subseteq \tau \Rightarrow \tau = \sigma$ ▲