Robert A.

Notación : X normal irreducible
$\mathrm{Div}(X)$ = divisores de Weil
$\mathrm{Cart}(X)$ = divisores de Cartier $\subseteq \mathrm{Div}(X)$ (X = normal)
div $\overset{\shortparallel}{\text{loc.}}$ principales

$\mathrm{Div}(X) \ni D \rightsquigarrow \mathcal{O}_X(D)$ haz Quasi-coherente $\mathcal{U} \mapsto \{f \in k(X)^* / \mathrm{div}(f) + D \geq 0 \text{ en } \mathcal{U}\} \cup \{0\}$

D cartier $\Rightarrow \mathcal{O}_X(D)$ es line bundle.
$\mathrm{Cl}(X) = \mathrm{Div}(X)/\mathrm{Prin}(X)$ $\quad$ ($\mathrm{Prin}(X) = \{\mathrm{div}(f) : f \in K(X)^*\} \cup \{0\}$)
$\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Cart}(X)/\mathrm{Prin}(X)$ $\quad$ (Sup. X integral).

$\to$ Δ abanico en N, $X = X(\Delta)$, $T = T_N$.
Sean $\tau_1, \dots, \tau_d$ los rayos en Δ, sea $v_i \in N$ el primer elemento de N en $\tau_i \rightsquigarrow V(\tau_i) \subseteq X(\Delta)$, $\dim V(\tau_i) = \dim X - 1$.
Sea $D_i := V(\tau_i) \Rightarrow \mathrm{Div}_T(X) := \langle D_1, \dots, D_d \rangle_{\mathbb{Z}}$ = T-divisores de Weil
$\mathrm{Cart}_T(X) = \mathrm{Div}_T(X) \cap \mathrm{Cart}(X)$.

Lema 1 : Si $u \in M$, entonces $\mathrm{div}(\chi^u) = \sum_{i=1}^{d} \langle u, v_i \rangle D_i$

Dem : $i = 1$, v_1 es parte de una base de N. obtengo un isomorfismo $N \longrightarrow \mathbb{Z}^n$ que lleva v_1 en e_1.

Obs/ Basta verificar este cálculo en $U_{\tau_1} \cup \dots \cup U_{\tau_d}$:
U_{τ_1} por definición es $\mathrm{Spec}\, k[\tau_1^\vee \cap M] \simeq \mathrm{Spec}\, k[(\mathbb{R}_{\geq 0} e_1)^\vee \cap \mathbb{Z}^n]$
$= \mathrm{Spec}\, k[t] \times \mathrm{Spec}\, k[t_2^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}] = \mathbb{A}^1 \times (k^*)^{n-1}$

$\therefore$ Basta ver que es cierto en $\mathbb{A}^1 \times (k^*)^{n-1}$, $U_{\tau_1} \cap V(\tau_1) \text{“}=\text{”} \{0\} \times (k^*)^{n-1}$.
$\therefore$ el orden de vanishing de χ^u en $\{0\} \times (k^*)^{n-1}$ es $\langle e_1, u \rangle$ $\blacksquare$

Lema 2: Si σ es un cono puntiagudo en N
$\Rightarrow$ $\forall$ T-div de Cartier D, $\exists\, u \in M$ tq
$D = \mathrm{div}(\chi^u)$ en U_σ.

obs/ Lema 1 $\Rightarrow$ $\mathrm{div}(\chi^u) = 0$ en U_σ $\Leftrightarrow$ $\langle u, v_i \rangle = 0 \;\forall i$
$\Leftrightarrow u \in \sigma^{\perp}$

$\therefore$ $\mathrm{div}(\chi^u)$ determina u módulo $\sigma^\perp \cap M$.

Cor/ Un T-div de Cartier en X se define por un elemento
$(u(\sigma))_{\sigma\in\Delta} \in \prod_{\sigma\in\Delta} M/M\cap\sigma^\perp$
tal que si τ es cara de σ, el homo $M/M\cap\sigma^\perp \to M/M\cap\tau^\perp$
lleva $u(\sigma)$ en $u(\tau)$ mod $M\cap\tau^\perp$.

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Cart}_T(X) = \varprojlim M/M\cap\sigma^\perp .$$

Receta para calcular $Cl(X)$ y $\mathrm{Pic}(X)$:

Prop/ $X = X(\Delta)$, sea V_Δ el subespacio en $N_{\mathbb{R}}$ generado por los conos en Δ. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M/M\cap V_\Delta^\perp \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Cart}_T(X) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{Pic}(X) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & M/M\cap V_\Delta^\perp \arrow[r] & \mathrm{Div}_T(X) \arrow[r] & Cl(X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Div}_T(X) \cong \mathbb{Z}^d$$

donde las filas son exactas. En particular, $\mathrm{rango}(\mathrm{Pic}(X)) \leq d - \dim V_\Delta$.
Además, si Δ tiene un cono de dim $\dim V_\Delta$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Pic}(X)$ es libre abeliano.

Dem/ Si $D \in \mathrm{Div}(X)$ $\Rightarrow$ su restricción a T_N es trivial ya que
($T_N = \mathrm{Spec}\, k[t_1^{\pm1}, \ldots, t_n^{\pm1}]$ DFU $\Rightarrow$ $Cl(T_N) = 0$).

Hartshorne $\Rightarrow \quad \oplus \mathbb{Z} D_i \to Cl(X) \to Cl(T_N) \to 0$

$\Rightarrow \quad Div_T(X) \twoheadrightarrow Cl(X) \qquad \overset{\shortparallel}{0}$

~~lo mismo que~~

Segunda fila es exacta: si $D \in Div_T(X)$ es principal $\Rightarrow D = div(f)$ ya que por lema 2, $div(f) = div(\chi^u)$ en $U_{0} = T_N$

$\therefore$ f y χ^u difieren por mult. con un elemento en $k[M]$ pero elementos invertibles de $k[M]$ son de la forma $\lambda\chi^v$ $\forall \lambda \in k^*$ y $v \in M$ $\Rightarrow$ $f = \lambda \chi^w$ algún $w \in M$.

Lema 1: $div(\lambda\chi^w) = \sum_{i=1}^{d} \langle w, v_i \rangle D_i \Rightarrow w$ está determinado mod $V_\Delta^\perp$

$\Rightarrow$ exactitud de la segunda fila,

Primera fila: $\mathcal{L} \in Pic(X) \Rightarrow$ su restricción a T es trivial

luego $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$, D cartier, $D|_T = div(f)$

$\Rightarrow \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_X(D - div(f))$, $supp(D - div(f)) \subseteq X \setminus T = \bigcup_i D_i$

$\Rightarrow D - div(f) \in Cart_T(X) \Rightarrow Cart_T(X) \to Pic(X)$ es sobre.

Obs/- Si $\dim \sigma = \dim V_\Delta \Rightarrow M/M\cap\sigma^\perp = M/M\cap V_\Delta^\perp$

$$\therefore \quad M/M\cap\sigma^\perp \hookrightarrow Cart_T(X) \hookrightarrow \prod_{\mu \in \Delta} M/M\cap\mu^\perp \to M/M\cap\sigma^\perp$$

Id

$\therefore$ Picard es un sumando libre de torsión.

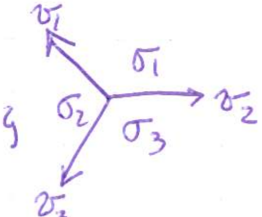
Ej: Δ con rayos $v_1 = 2e_1 - e_2$, $v_2 = -e_1 + 2e_2$, $v_3 = -e_1 - e_2$

$$U_{\sigma_1} \cong \mathrm{Spec}\left(k[x,y,z]/(xy - z^3)\right) \qquad Cl(U_{\sigma_1}) = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

$$\wr\wr$$

$$U_{\sigma_2} \simeq U_{\sigma_3}$$

generador $= \{y = z = 0\}$



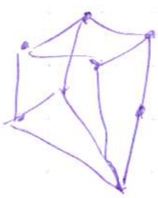
$$0 \to \mathbb{Z}^2 = M \longrightarrow \mathbb{Z}D_1 \oplus \mathbb{Z}D_2 \oplus \mathbb{Z}D_3 \to Cl(X) \to 0$$

$$(a,b) \mapsto (-a+2b, -a-b, 2a-b)$$

$$\Rightarrow \quad Cl(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \langle D_1 \rangle \oplus \langle D_1 - D_2 \rangle \qquad \therefore \ \mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}.$$

Ej: Definir Δ por los vértices $\{\{(\pm 1, \pm 1, \pm 1)\} \cup \{(1,2,3)\}\} \setminus \{(1,1,1)\}$

Lema: si $\forall$ vértice v tenemos $r_v \in \mathbb{R}$ y $\forall \sigma$ de dim max. $\exists\, u_\sigma \in M_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^3$ tq $\langle u_\sigma, v \rangle = r_v$ si $v \in \sigma$, entonces todos los u_σ son iguales.



Sea $D \in \mathrm{Cart}_T(X)$, $D = (u(\sigma))_{\sigma \in \Delta}$ tq las restricciones coinciden.

Ej: en $U(\sigma_1)$ $\quad D|_{U(\sigma_1)} = \sum_{i=1}^{n} \langle u(\sigma_i), v_i \rangle D_i$ y los $u(\sigma_i)$ satisfacen el lema

$$\Rightarrow \quad u(\sigma_i) \text{ iguales a } u \in M$$

$$\Rightarrow \quad D = \langle u, v_1 \rangle D_1 + \cdots + \langle u, v_6 \rangle D_6 = \mathrm{div}(\chi^u).$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Pic}(X) = \{0\}. \qquad \therefore \ X = \text{var. tórica completa}$$

Y **No** proyectiva.

Único div. Cartier efectivo es cero.