(1)

Robert A.
29-oct.

→ Sea D un ~~[illegible]~~ $\mathbb{Q}$-T divisor, $\mathbb{Q}$-Cartier, $D \in \langle D_1, \dots, D_d \rangle_{\mathbb{Q}}$

Sea $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ tq. mD tiene coef. enteros y es cartier
$\forall \sigma \in \Delta$ maximal, $\exists\, u(\sigma) \in \frac{1}{m} M$ tq $mD|_{U_\sigma} = \operatorname{div}(\chi^{-mu(\sigma)})$

y ~~[illegible]~~ $u(\sigma)$ es único mod $M \cap \sigma^\perp$, σ, τ maximales $\Rightarrow u(\sigma) - u(\tau) \in (M \cap \sigma \cap \tau)^\perp$.

→ Definimos la siguiente función $\psi_D : |\Delta| \to \mathbb{R}$
$v \mapsto \langle u(\sigma), v \rangle$ si $v \in \sigma$.

Prop/-
(1) La restricción de ψ_D a cada cono es lineal
(2) $\psi_D(|\Delta| \cap N_{\mathbb{Q}}) \subseteq \mathbb{Q}$.
(3) Si $D = \sum_{i=1}^{d} a_i D_i \Rightarrow \psi_D$ está determinado por $\psi_D(v_i) = -a_i$.

Lema/- Si $\psi : |\Delta| \to \mathbb{R}$ es una función tal que
(1) Su restricción a cada cono es lineal
(2) $\psi(|\Delta| \cap N_{\mathbb{Q}}) \subseteq \mathbb{Q}$
$\Rightarrow \psi = \psi_D$ para un único $\mathbb{Q}$-T-div. $\mathbb{Q}$-Cartier.

Dem: Sea $D = -\sum_{i=1}^{d} \psi(v_i) D_i$. D es $\mathbb{Q}$Cartier ya que: Sea σ un cono (maximal), $v_{i_1}, \dots, v_{i_s}$ los elementos prim en sus rayos

$$D|_{U_\sigma} = -\sum_{j=1}^{s} \psi(v_{i_j}) D_{i_j}$$

ψ lineal en $\sigma \Rightarrow \psi(v_{i_j}) = \langle u(\sigma), v_{i_j} \rangle$ algún $u(\sigma) \in M_{\mathbb{Q}}$

$m>>0$ $$mD|_{U_\sigma} = -\sum_{j=1}^{s} \langle m\, u(\sigma), v_{i_j} \rangle D_{i_j} = \operatorname{div}(\chi^{-m u(\sigma)})$$
principal ▪

Cor: $\{\mathbb{Q}\text{-T-div } \mathbb{Q}\text{-Cartier}\} \Longleftrightarrow \{\psi: |\Delta| \to \mathbb{R} : \psi \text{ satisf. } (1),(2)\}$

Obs: (1) D está en T-div $\Leftrightarrow$ $\psi_D(|\Delta| \cap N) \subseteq \mathbb{Z}$

(2) D está en $\mathrm{Cart}_T(X)$ $\Leftrightarrow$ la restricción a cada cono está dada por un elemento de M

Def: $\psi: |\Delta| \to \mathbb{R}$ es cóncava si $\forall v_1, v_2 \in |\Delta|$, $0 \le t \le 1$

$$\psi(tv_1 + (1-t)v_2) \geq t\psi(v_1) + (1-t)\psi(v_2)$$

si está definido.

Lema: Sup. que todos los conos maximales en Δ tienen dim n

ψ es cóncava $\Leftrightarrow$ $\forall \sigma$ max, $v \in |\Delta|$

$$\langle u(\sigma), v \rangle \geq \psi(v) \quad (*)$$

Def: Sea $|\Delta|$ convexo. ψ es estrictamente cóncava si $(*)$ es estricto $\forall v \notin \sigma$.

Geometría: $L \in \mathrm{Pic}(X)$ es glob. gen. si las secciones globales generan los tallos.

Prop: D T-div de Cartier en $X = X(\Delta)$. Entonces $\mathcal{O}_X(D)$ es globalmente generado $\Leftrightarrow$ $\forall$ cono max. $\sigma \in \Delta$, $\exists u(\sigma) \in M$ tq $\psi_D(v) \le \langle u(\sigma), v \rangle$. $\forall v \in |\Delta|$, con igualdad si $v \in \sigma$. Si todos los conos maximales tienen dim n, esto es equivalente a que ψ_D sea cóncava.

Dem: $\mathcal{O}_X(D)$ globalmente generado $\Leftrightarrow$ $\forall \sigma$ maximal, $\exists u(\sigma) \in M$ tq

$$D|_{U_\sigma} + \mathrm{div}(\chi^{u(\sigma)}) \geq 0$$

$$\text{y } \left. D + \mathrm{div}(\chi^{u(\sigma)}) \right|_{U_\sigma} = 0.$$

$$\underbrace{D}_{= \sum a_i D_i} + \underbrace{\mathrm{div}(\chi^{u(\sigma)})}_{= \sum \langle u(\sigma), v_i \rangle D_i} \geq 0 \Leftrightarrow \sum (\langle u(\sigma), v_i \rangle - \psi_D(v_i)) D_i \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \langle u(\sigma), v_i \rangle \geq \psi_D(v_i) \Leftrightarrow \begin{array}{c} \psi_D(v) \le \langle u(\sigma), v \rangle \\ \forall v \in |\Delta| \end{array}$$

$D + \mathrm{div}(\chi^{u(\sigma)})\big|_{U_\sigma} = 0 \iff \psi_D(v) = \langle u(\sigma), v\rangle \ \forall v \in \sigma.$ ∎

Prop/ $|\Delta|$ convexo. Un T-div $\mathbb{Q}$-Cartier es amplio $\iff \psi_D$ es estrictamente cóncava.

Ej/ Lema de Chow. $\exists$ un refinamiento Δ' de Δ tal que $X(\Delta')$ es proyectivo si $X(\Delta)$ es completo.

Prop/ X suave, proyectivo $\Rightarrow$ L es amplio $\iff$ es muy amplio.

Prop/ $|\Delta|$ convexo, $L \in \mathrm{Pic}(X)$. Entonces L es nef $\iff$ es globalmente generado.

Prop/ (Nakai-Moishezon Tórico) $|\Delta|$ convexo, L amplio $\iff (L \cdot C) > 0 \ \forall C$ curva completa T-invariante en X.

Prop/ $X = X(\Delta)$ n-dim, suave, D un T-div en X, $C = V(\tau)$ curva completa (τ cono $(n-1)$-dim); σ, σ' conos maximales en Δ con $\sigma \cap \sigma' = \tau$

Entonces $(D \cdot V(\tau)) = \langle u(\sigma) - u(\sigma'), v'\rangle = \langle u(\sigma') - u(\sigma), v\rangle$ donde v, v' son generadores primitivos de σ, σ' fuera de τ.

Cor/ L line bundle, $|\Delta|$ convexo. Si $(L \cdot C) = 0$, $\forall C$ curva completa invariante $\Rightarrow L \simeq \mathcal{O}_X$.

Dem/ $(L \cdot C) = 0 \ \forall C$ inv $\Rightarrow L$ es nef $\Rightarrow L$ es globalmente generado $\Rightarrow$ Si $L = \mathcal{O}_X(D) \Rightarrow \psi_D$ es cóncava. Lo mismo para L^{-1} $\Rightarrow -\psi_D$ es cóncava $\Rightarrow \psi_D$ es lineal $\Rightarrow \psi_D = \langle u, \cdot\rangle \Rightarrow D = \mathrm{div}(\chi^u)$ ∎