Tenemos la sucesión exacta: $0 \to \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}_0} \to \mathcal{O}_{N'} \oplus \mathcal{O}_{\tilde{E}} \to \mathcal{O}_C \to 0$

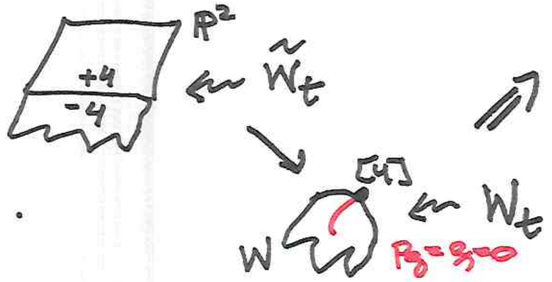
Hecho: $G = T_{\mathbb{P}^2}(-1)$ se puede pegar con $\mathcal{L}^{\oplus 2}$ donde $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(\mathbb{F}_4)$ y $\mathcal{L}|_C \cong \mathcal{O}(1)$.

$\therefore$ v.b. $\tilde{\mathcal{E}}$ en $\tilde{\mathcal{X}}_0$ y se verifica que es excepcional.

$\therefore$ Deforma a un v.b. $\mathcal{E}$ sobre $\tilde{\mathcal{X}}$ tal que $\mathcal{E}|_{\tilde{\mathcal{X}}_t}$ es exc. v.b.

Obs: Se puede demostrar que $\mathcal{E}|_{\tilde{\mathcal{X}}_t} \simeq T_{\mathbb{P}^2}$.

3. Borrar un poco de y considerar una degeneración que localmente se vea igual.



$\Rightarrow$ $\exists$ E e.v.b. rank 2 on W_t.

Cuidado: Necesitamos en W un divisor que corte 1 vez la sing; también necesitamos $p_g = q = 0$.

No ej.- Enriques $= W_t \rightsquigarrow$

ya que no hay tal divisor ; $0 \to \mathrm{Pic}(W_t) \to \mathrm{Cl}(W) \to \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/2 \to 0$

Falla ser sobre

4. Esto funciona en mayor generalidad.

★ Teorema (Hacking 2013).

Sea $(W \subset \mathcal{X}) \to (0 \in \mathbb{D})$ una W-superficie [W proyectiva con solo sing. de Wahl; $K_{\mathcal{X}}$ $\mathbb{Q}$-Cartier] tal que

(1) W solo 1 sing Wahl $\frac{1}{n^2}(1, na-1)$, $p_g(W) = q(W) = 0$.

(2) $0 \to \mathrm{Pic}(W_t) = H_2(W_t) \to \mathrm{Cl}(W) = H_2(W) \to \mathbb{Z}/n \to 0$ es exacta ($t \neq 0$).
$\mathbb{Z}/n \simeq H_1(\text{Milnor } \frac{1}{n^2}(1, na-1))$

$\Rightarrow$ (posiblemente salvo cambio base) $\exists$ $\mathcal{E}$ sobre $\mathcal{X}$ reflexive sheaf ($\mathcal{E} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{E}^{\vee\vee}$) tal que

(a) $\mathcal{E}|_{W_t} = E$ es un e.v.b. rank n.

(b) $\mathcal{E}|_W = E_0$ es libre de torsión tal que $E_0^{\vee\vee} \simeq \mathcal{O}_W(A)^{\oplus n}$

y $c_1(E) = nA$ $\quad c_2(E) = \frac{n-1}{2n}(c_1^2(E) + n + 1)$ $\quad c_1(E) \cdot K_{W_t} \equiv \pm a \pmod{n}$.

3.5

Sobre la sucesión exacta de la inclusión $f:(W^\circ, \cup L_i) \to (Y, \cup M_i)$ donde $W^\circ = W \setminus \{P_1,\dots,P_\ell\}$, L_i = link en P_i y M_i = Milnor fibers de los $\mathbb{Q}$-Gorenstein smoothings de P_i:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i=1}^{\ell} H_2(L_i) \arrow[r] \arrow[d] & H_2(W^\circ) \arrow[r] \arrow[d] & H_2(W) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \bigoplus_{i=1}^{\ell} H_1(L_i) \arrow[r] \arrow[d] & H_1(W^\circ) \arrow[r] \arrow[d] & H_1(W) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\bigoplus_{i=1}^{\ell} H_2(M_i) \arrow[r] & H_2(W_t) \arrow[r] & H_2(W) \arrow[r] & \bigoplus_{i=1}^{\ell} H_1(M_i) \arrow[r] & H_1(W_t) \arrow[r] & H_1(W) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Mirar Libro

$\Rightarrow$

bajo $h^1(\mathcal{O}_W)=h^2(\mathcal{O}_W)=0$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_2(W^\circ)=\mathrm{Pic}(W) \arrow[r] \arrow[d] & H_2(W)=\mathrm{Cl}(W) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \bigoplus \mathbb{Z}/n_i^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d] & H_1(W^\circ) \arrow[r] \arrow[d] & H_1(W) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & H_2(W_t)=\mathrm{Pic}(W_t) \arrow[r] & H_2(W)=\mathrm{Cl}(W) \arrow[r] & \bigoplus \mathbb{Z}/n_i \arrow[r] & H_1(W_t) \arrow[r] & H_1(W) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Así queremos que $H_1(W^\circ) \simeq H_1(W_t) \simeq H_1(W)$.

Ejl.- Si W es racional $\Rightarrow$ queremos $H_1(W^\circ)=0$ o $H_1(W_t)=0$.

Considerar $\mathrm{coker}(f) \subset H_1(W^\circ)$. Queremos $\mathrm{coker}(f)=0$.

Por otro lado [KKS] "Derived categories of sing. surfaces" 2020
[KPS] "Obstructions to s.o.d. for sing. 3-folds" 2020

Def.- (Particular para [KPS, Def 3.4]) W tiene suficientes Weil div si $\mathrm{Cl}(W) \to \oplus \underbrace{\mathrm{Cl}(\hat{\mathcal{O}}_{W,P})}_{=H_1(L_i)}$ es sobre.

Prop.- [KPS, Prop 3.6 ~~xxx~~] Si X es superficie normal proyectiva, entonces $0 \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Cl}(X) \to \oplus\, \mathrm{Cl}(P\in X) \to K_{-1}(X) \to 0$.
(ie, en nuestro caso $\boxed{\mathrm{coker}(f) = K_{-1}(X)}$)

Prop.- [KPS, Prop 3.7] Si X además es racional con sing. racionales $\Rightarrow K_{-1}(X) \simeq \mathrm{Br}(X)$. [Quizás $\mathrm{Br}(X)$ es $H_1(W^\circ)$].

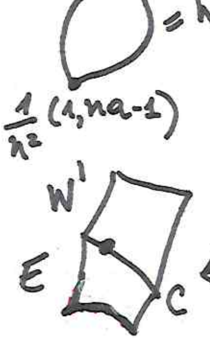
$\mathrm{Br}(X) = \mathrm{Br}'(X) = \mathrm{Ext}^1(\mathrm{Cl}(X), \mathbb{Z}) = \mathrm{Ext}^1(G_0(X), \mathbb{Z})$

Ejl.- $\mathbb{P}^3 \supset (w^3 = xyz) = X \Rightarrow \mathrm{Cl}(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3$, X racional con $3A_2$ y $\mathrm{Br}(X) = \mathbb{Z}/3$.

Mas aún, si $\mathcal{H}$ es line bundle sobre $\mathcal{W}$ amplio en las fibras
$\Rightarrow$ E es <u>slope stable</u> con respecto a $\mathcal{H}|_{W_t}$.

[Referencia: "Exceptional v.b. associated to degenerations of surfaces" Dake 2013]

<u>Retomar</u>:



$\frac{1}{n^2}(1,na-1)$ en W_t, $\uparrow$, $\leftarrow W_t$, $\tilde{\mathcal{W}}$

$\mathbb{Q}$-Gorenstein smoothing $\mathcal{W}$. Let $\frac{n^2}{na-1} = e_1 - \frac{1}{e_2 - \dots - \frac{1}{e_r}}$.

(1) $W' \longrightarrow W$ extrae el primer $\mathbb{P}^1 = C$ con $C^2 = -e_1$.

(2) $E = (w^n + t^a = uv) \subset \mathbb{P}(\underset{u}{1}, \underset{v}{na-1}, \underset{w}{a}, \underset{t}{n})$
$\cup$
$C = (t=0) \ni (0,1,0,0)$

E  $\frac{1}{na-1}(1,n^2) = \frac{1}{na-1}(a^2,1)$ ya que $n^2a^2 \equiv 1\ (na-1)$ y  W' $\frac{1}{na-1}(1,-n^2)$

(3) $\mathcal{X} = (uv = T\cdot w^n + t^a) \subset \mathbb{P}(1, na-1, a, n)$

$\Rightarrow$ $T \neq 0$, $\mathcal{X}_T = W$ pero $T=0$, $\mathcal{X}_0 = (uv = t^a) = \mathbb{P}(1, na-1, a^2)$

ya que $\mathbb{P}(1,na-1,a^2) \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}_0 = (uv = t^a)$
$(\alpha,\beta,\gamma) \mapsto (\alpha^a, \beta^a, \gamma, \alpha\beta)$

$\therefore$ E  $\frac{1}{na-1}(a^2,1)$ $\underset{\mathbb{Q}\text{-Gor.}}{\rightsquigarrow}$  $\frac{1}{na-1}(a^2,1)$, $\frac{1}{a^2}(1,na-1)$ $= \mathbb{P}(1,na-1,a^2)$

(4) Inducción en a, con una superficie $\mathbb{P}(1,an-1,a^2)$ que satisface [(1) y (2)].

(Key) Prop 5.1 : $0<a<n$ coprimos,

$$E = E_{a,n} := (xy = z^n + T^a) \subset \mathbb{P}(1, na-1, a, n)$$

$C_1 = \{z=0\}$

$\frac{1}{na-1}(1,a^2) \ni P$ $= E_{a,n}$. Entonces $\exists\, F_1, F_2$ e.v.b.

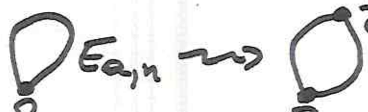
$C = C_2 = \{T=0)$

sobre E de rangos a y n tal que

(1) $H^i(F_j^\vee) = 0 \ \forall i$ (2) $H^i(F_j) = 0 \ \forall i>0$

(3) F_j generado por secciones globales (4) $F_j|_{C_j} \simeq \mathcal{O}_{C_j}(1)^{\oplus \operatorname{rk}(F_j)}$.

Dos casos pasan: $E_{a,n} \rightsquigarrow$ $\frac{1}{a^2}(na-1,1)$



P P

I. Lo único que necesitamos es producir F_1 en par excepcional $\mathcal{O}_E, F_1$. $\therefore$ mutación $F_2^\vee, \mathcal{O}_E$ lo hace!

II. Por inducción tal $\mathcal{O}_E, F_1$ existirá.

Obs: Suponer que tenemos el $F_2^\vee, \mathcal{O}_E$ exc. col., tal que $c_1(F_2)\cdot C_2 = n$ y $\operatorname{rk}(F_2) = n$.

$\Rightarrow$ $F_2|_{C_2} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus n}$.

- $0 \to \operatorname{End}F_2(-C_2) \to \operatorname{End}F_2 \to \operatorname{End}F_2|_{C_2} \to 0$
  y $H^0(\operatorname{End}F_2) = \mathbb{C}$, $H^i(\operatorname{End}F_2) = 0$ $i=1,2$.
- Basta con demostrar $H^1(\operatorname{End}F_2|_{C_2}) = 0$ ya que $F_2|_{C_2} = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}(a_i)$ y $a_1 + \dots + a_n = n$.
- Tenemos $H^1(\operatorname{End}F_2) = 0$, y

$$H^2(\operatorname{End}F_2(-C_2)) = H^0(\operatorname{End}F_2(K_W + C_2))^* = H^0(\operatorname{End}F_2(-aH))$$

but $H = \mathbb{P}^1$, $0 \to \mathcal{O}(-H) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_H \to 0$ $\quad \operatorname{End}F_2 \to \operatorname{End}F_2|_H$

& $H^0(\operatorname{End}F_2) = \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $H^0(\operatorname{End}F_2(-aH)) = 0$. $\quad 1 \mapsto 1$ not cero

Mirar QHD análogo.

Definición: Para un exceptional pair (E,F), se definen los objetos $L_E F$ y $R_F E$ a través de

$$L_E F \to Hom(E,F)\otimes E \xrightarrow[can]{} F \quad y \quad E \xrightarrow[can]{} Hom(E,F)^\vee \otimes F \to R_F E$$

$\left[\text{donde } can \equiv 1\!\!1 \in End(Hom(E,F)) \simeq Hom(E,F)^\vee \otimes Hom(E,F) \simeq H^0(E^\vee \otimes Hom(E,F)^\vee \otimes F)\right]$

Por ejemplo: Si $E=\mathcal{O}$ y $(\mathcal{O},F)$ excep.

$\Rightarrow \quad L_E F \to H^0(F) \longrightarrow F \quad y \quad \mathcal{O} \to H^0(F)^\vee \otimes F \to R_F E$

$rk\% = h^0(F) - rk(F) \qquad rk(R_F E) = h^0(F)\cdot rk(F) - 1$

Def: Una colección de e.v.b. $E_r, E_{r-1}, \dots, E_0$ es e.c. si $Ext^k(E_i, E_j) = 0 \quad \forall i<j, \forall k$.

Prop: Si $E_r, \dots, E_0$ es e.c., entonces:

(0) Toda mutación lo es y el Braid group B_{r+1} actúa.

(1) $E_r \otimes \mathcal{L}, \dots, E_0 \otimes \mathcal{L}$ es e.c. $\forall \mathcal{L} \in Pic(X)$.

(2) $E_0 \otimes \mathcal{O}(K), E_r, \dots, E_1$ lo es; $E_{r-1}, \dots, E_0, E_r \otimes \mathcal{O}(-K)$ lo es.

(3) $E_0^\vee, E_1^\vee, \dots, E_r^\vee$.

Conj (Orlov): $\mathcal{D}^b(X) = \langle E_r, \dots, E_0 \rangle$ full $\Rightarrow X$ racional.

¿Cómo crear una e.c. en una sup. proy. nosing. X con $h^1(\mathcal{O}_X) = h^2(\mathcal{O}_X) = 0$?

Tarea: (Prop. 6.9) 

$\subset X$ con $\Gamma_i \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

$\Rightarrow \quad \mathcal{O}(-\Gamma_r - \dots - \Gamma_1), \dots, \mathcal{O}(-\Gamma_2 - \Gamma_1), \mathcal{O}(-\Gamma_1), \mathcal{O}$

es una e.c. de largo $r+1$.

Dem: $Ext^k(-\Gamma_i \dots - \Gamma_1, -\Gamma_{i+j} \dots - \Gamma_1) \simeq H^j(-\Gamma_{i+j} - \dots - \Gamma_{i+1}) = 0$ ya que conexo y $p_a = 0$ ■

Ej.- $\mathbb{P}^2$  $\mathbb{F}_m$ 

y así toda racional tiene haciendo blow-ups, con largo máximo.