Hacking vector bundles 03/06

Referencias principales: Categorical aspects of the Kollar-Shepherd-Barron Correspondance, J. Tevelev - G. Urzúa, 2022.

Semi-Orthogonal Decomposition and Smoothing, Y. Kawamata, 2021.

Def: E v.b sobre Y superficie proyectiva suave es excepcional si $\mathrm{Ext}^0(E,E)=\mathbb{C}$
$\mathrm{Ext}^k(E,E)=0$, $k>0$.

Teorema: (Hacking - Kawamata).
Sea $(W\subset \mathcal{W}) \to (0\in \mathbb{D})$ es W-superficie y $P=\frac{1}{n^2}(1,na-1)\in W$
tq i) $p_g(W)=q(W)=0$
ii) $\exists\ A=\mathcal{O}(-D)$ haz divisorial tq $A|_{(P\in W)}$ forma un eje coordenado tórico y A es invertible salvo en las singularidades de W.

Entonces bajo un cambio de base, $\exists\ \mathcal{E}\in \mathrm{coh}(\mathcal{W})$ Cohen-Macaulay tq
i) $\mathcal{E}|_W \cong A^{\oplus n}$
ii) $E=\mathcal{E}|_{W_t}$ es un v.b excepcional con $\mathrm{rk}(E)=n$, $c_1(E)\cdot K_{W_t}\equiv \pm a \pmod n$.

Def: Sean $E_r,\dots,E_0$ e.v.b sobre Y, decimos que forman una colección excepcional si

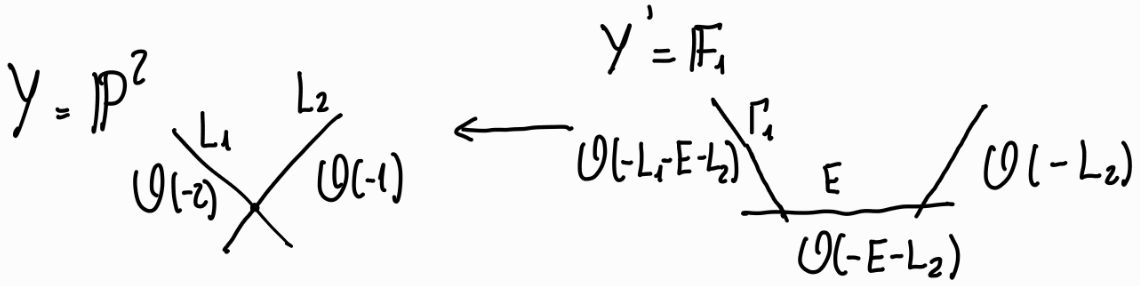
$$\mathrm{Ext}^k(E_i,E_j)=0 \quad \text{para } i<j \text{ y } k\geq 0.$$

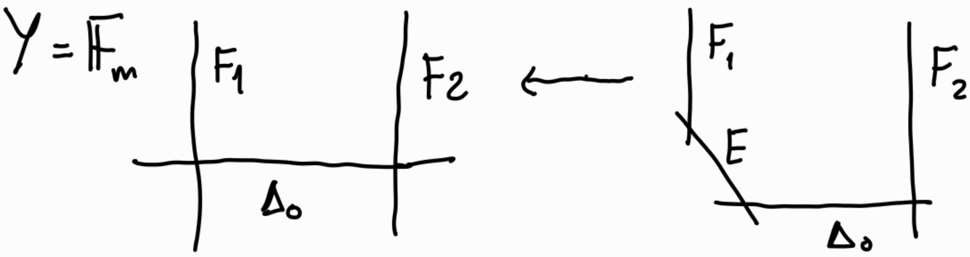
Decimos que la colección excepcional es full si $D^b(Y)=\langle E_r,\dots,E_0\rangle$.

Ejemplo: $Y\simeq \mathbb{P}^2$: [Beilinson 78] $D^b(\mathbb{P}^2)=\langle \mathcal{O},\mathcal{O}(1),\mathcal{O}(2)\rangle$, más aún si $\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_0$ e.c con $\mathrm{rk}(\mathcal{E}_i)=n_i$, entonces $n_0+n_1^2+n_2^2=3n_0n_1n_2$.

Lema: Si Y es superficie suave, $P_g(Y)=q(Y)=0$ y $\exists\, \Gamma_r,\dots,\Gamma_1$ cadena de curvas racionales suaves, entonces

$$\mathcal{O}_Y(-\Gamma_r-\dots-\Gamma_1),\ \dots,\ \mathcal{O}_Y(-\Gamma_1),\ \mathcal{O}_Y \quad \text{forman una e.c.}$$





Teorema (T-U 22). Sea $(W\subset \mathcal{W})\to(0\in\mathbb{D})$ W-superficie tq

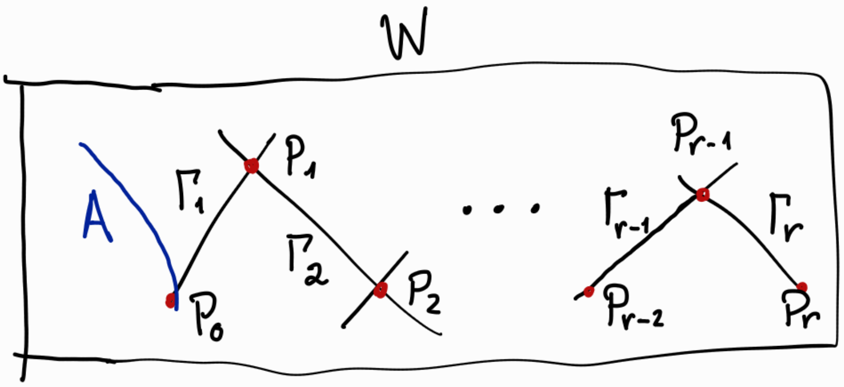
i) $P_g(W)=q(W)=0$

ii) Sean $P_0,\dots,P_r$ las singularidades de W. Suponemos que $\exists\, \Gamma_1,\dots,\Gamma_r$ cadena de curvas racionales tq Γ_i, Γ_{i+1} forman un borde tórico para P_i

iii) $\exists\, A\in Cl(W)$ tq $A|_{W\setminus\{P_0\}}$ es Cartier y A genera el $Cl(P_0\in W)$.

Entonces $\exists\, E_r,\dots,E_0$ e.c sobre W_t tq : $rk(E_i)=n_i$

$$c_1(E_i)=n_i(A+\Gamma_1+\dots+\Gamma_i)\in H^2(W_t,\mathbb{Z}).$$



La idea de la prueba es construir una s.o.d de $\mathcal{W} \to \mathbb{D}$ con objetos "pretilting"

$$D^b(\mathcal{W}) = \langle \mathcal{A}_r^{\mathcal{W}}, \dots, \mathcal{A}_1^{\mathcal{W}}, \mathcal{B} \rangle$$ tal que la descomposición se restringe a las fibras.

- Para ello debemos construir haces maximales Cohen Macaulay sobre $\mathcal{W}$. La siguiente construcción se hace sobre la fibra especial $W = W_0$.

Def: Sea $D \in Coh(W)$, la extensión p-ésima iterada de D se define como D^p donde $D^0 = D$ y para $p > 0$ tomamos la extensión universal de D^{p-1} sobre D.

$$0 \to D \otimes Ext^1(D^{p-1}, D)^\vee \to D^p \longrightarrow D^{p-1} \to 0.$$

Decimos que D^p es maximal si $Ext^1(D^{p-1}, D) = 0$, escribimos $\hat{D} = D^p$.

En nuestro caso tomamos $D_0 = -A$

$$D_i = -A - \Gamma_1 - \dots - \Gamma_i, \ i \geq 1$$ y aplicamos la construcción.

Lema: Para D_i existe $F_i = \widehat{D_i}$ y satisface las siguientes condiciones:

- F_i es localmente libre sobre $W \setminus \{P_0, .., P_i\}$

i) $\mathcal{E}xt^k(F_i, F_j) = 0$ para $k > 0$ y $i \leq j$.

ii) $Ext^k(F_i, F_j) = 0$ para $k > 0$ y $i \leq j$.

∗ Notamos de ii) que F_i no está obstruido para deformarse.

Definición / Lema: $\exists\ \mathcal{F}_i \in coh(\mathcal{W})$ plano relativo a D tq $\mathcal{F}_i|_W = F_i$.

a $\mathcal{F}_i$ lo llamamos Kawamata sheaf. Este satisface:

- $\mathcal{E}xt^k(\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j) = 0$ para $k>0$, $i \leq j$.
- $Ext^k(\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_i) = 0$ para $k>0$ (Esto es pretilting).
- $Ext^k(\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j) = 0$ para $k \geq 0$, $i<j$.

Consideramos $\mathcal{A}_i^{\mathcal{W}} := \langle \mathcal{F}_i \rangle$.

Remark: Para estos objetos pretilting se sigue que $\mathcal{A}_i^{\mathcal{W}} \cong D^b(End(\mathcal{F}_i))$ donde $End(\mathcal{F}_i)$ es un álgebra asociativa. La equivalencia está dada por el functor

$$D^b(End(\mathcal{F}_i)) \to D^b(X),\ \psi(\mathcal{G}^{\cdot}) = \mathcal{G}^{\cdot} \otimes^L \mathcal{F}_i.$$

Teorema (T-U): $D^b(\mathcal{W}) = \langle \mathcal{A}_r^{\mathcal{W}}, \dots, \mathcal{A}_0^{\mathcal{W}}, \mathcal{B}^{\mathcal{W}} \rangle$ donde $\mathcal{B} \in D^{Perf}(\mathcal{W})$.

y esta descomposición se restringe a las fibras.

$$D^b(W_t) = \langle \mathcal{A}_r^{W_t}, \dots, \mathcal{A}_0^{W_t}, \mathcal{B}^{\mathcal{W}} \rangle.$$

- De este teorema y Theorem 4.3 del paper de Kawamata se sigue el teorema principal.

Sketch Dem:

$\mathcal{F}_i$ es una deformación versal NC de $D_i = \mathcal{O}_W(-A - \Gamma_1 - \dots - \Gamma_i)$ y así se sigue que

$$\mathcal{F}_i|_{W_t} \cong E_i^{\oplus n_i}$$

$\hookrightarrow$ Hacking e.v.b en W_t asociado a $\frac{1}{n_i}(1, n_i a_i - 1)$.

Dicho isomorfismo lo construye Kawamata en Thm 4.3 iii) usando slope stability de $\mathcal{F}_i$:

$$\mathcal{F}_i \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_i|_{W_t}, E_i^{\oplus n_i}) \otimes E_i.$$

Dado que

$$R\mathrm{Hom}(F_i, \mathcal{O}_W(-D_i)) \cong \mathbb{C} \Rightarrow R\mathrm{Hom}(F_i, \mathcal{O}_W(-D_i)^{\oplus n_i}) \cong \mathbb{C}^{\oplus n_i}$$

Por semicontinuidad se sigue que $R\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_i|_{W_t}, E_i^{\oplus n_i}) \cong \mathbb{C}^{\oplus n_i}$.

y así $\mathcal{F}_i|_{W_t} \cong E_i^{\oplus n_i}$.

Luego, por el teorema anterior tenemos $D^b(W_t) = \langle \langle E_r \rangle, \dots, \langle E_0 \rangle, \mathcal{B}^{W_t} \rangle$,

lo cual implica que $\mathrm{Ext}^k(E_i, E_j) = 0$ para $k \geq 0$, $i < j$ y así $E_r, \dots, E_0$ forma una e.c sobre W_t.