10 Junio 25

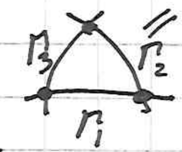
# Exceptional vector bundles en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

- Sean $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}_{>0}$.
  Tenemos $\mathbb{P}(m_1,m_2,m_3) = \mathbb{P}^2 / \mathbb{Z}/m_1 \oplus \mathbb{Z}/m_2 \oplus \mathbb{Z}/m_3 = \mathbb{C}^3 - \{(0,0,0)\} / \mathbb{C}^*$
  actuando como $\lambda \in \mathbb{C}^* * (x,y,z) = (\lambda^{m_1}x, \lambda^{m_2}y, \lambda^{m_3}z)$.

  $\therefore$ $\mathbb{P}(dm_1, dm_2, dm_3) = \mathbb{P}(m_1,m_2,m_3)$ y toda permutación. (*)
  Además $\mathbb{P}(m_1, dm_2, dm_3) = \mathbb{P}(m_1,m_2,m_3)$ si $\mathrm{mcd}(m_1,d) = 1$.

  Obs: (Mirar "Mori Dream Spaces and Blow-ups" (2017) por Ana María Castravet)
  Es extremadamente interesante encontrar curvas negativas
  en $Bl_{pt}(\mathbb{P}(m_1,m_2,m_3))$ cuando $\sqrt{m_1m_2m_3} \notin \mathbb{Z}$.

  Asumir $\mathbb{P}(m_1,m_2,m_3)$ con los $m_i$ en forma simplificada (*).




con sing $\frac{1}{m_i}(m_j, m_k)$, de hecho $\mathbb{C}^2 / \frac{1}{m_i}(m_j,m_k)$ son cortes.

Tenemos $Cl(W) \simeq \mathbb{Z}\langle \xi \rangle$ donde $\xi^2 = \frac{1}{m_1m_2m_3}$ y $K_{\mathbb{P}} = -(m_1+m_2+m_3)\xi$
y así $K_{\mathbb{P}}^2 = (m_1+m_2+m_3)^2 \cdot \frac{1}{m_1m_2m_3}$. $\qquad = -\Gamma_1 - \Gamma_2 - \Gamma_3$

- Hacking-Prokhorov muestran §3 [2010]: Si W tiene solo l.c. singularidades y $-K_W$ es big $\Rightarrow$ no hay local-to-global obstr. to deform W.
  En particular funciona para $W = \mathbb{P}(m_1,m_2,m_3)$.

- Manetti [1991]: Si W es una degeneración l.t. de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ $\Rightarrow$ W proyectiva con $q(W) = P_n(W) = 0 \ \forall n \geq 1$, $\rho(W) = 1$ y solo sing. de Wahl y $\mathbb{Q}$-Gorenstein. (Cor. 5)

  Así, para $W = \mathbb{P}(m_1,m_2,m_3)$ necesitamos $m_i = n_i^2 \ \forall i$ y $K_W^2 = 9$.
  $\Rightarrow$ $(n_1^2+n_2^2+n_3^2)^2 - 9n_1^2n_2^2n_3^2 = 0$ ie Markov:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 3n_1n_2n_3 .$$

- Hacking-Prokhorov [2010] : si $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \rightsquigarrow W$ es una $W$-superficie $\Rightarrow$ $W$ es una suavización $\mathbb{Q}$-Gorenstein parcial de $\mathbb{P}(n_1^2, n_2^2, n_3^2)$.

- <u>Teorema</u> [Gorodentsev-Rudakov 1987/Rudakov 1988] Salvo tensorizar y dualizar, toda full e.c. $E_2, E_1, E_0$ en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ se obtiene mutando un número finito de veces $\mathcal{O}(-2), \mathcal{O}(-1), \mathcal{O}$. Los rangos de $E_2, E_1, E_0$ forman un triple de Markov y mutar es mutar el triple.

<u>obs</u> : Gorodentsev 1988 muestra que un e.v.b. $E$ en una superficie del Pezzo $Y$ está determinado por $c_1(E)/\mathrm{rank}(E) \in \mathrm{Pic}(Y)_{\mathbb{Q}}$. Por otro lado, Kuleshov-Orlov 1994 prueban que una colección excepcional de haces en una del Pezzo siempre se puede completar a full.

- Recordar Teorema : $W \supset$ 

tq (1) $p_g(W) = q(W) = 0$
(2) $W_t \rightsquigarrow W$ (3) $0 \to \mathrm{Pic}(W_t) \to \mathrm{Cl}(W) \to \oplus\, \mathbb{Z}/n_i \to 0$ $\left(= H^1(W_t) \text{ en nuestro caso}\right)$
$\Rightarrow$ existe $E_r, E_{r-1}, \dots, E_0$ e.c. en $W_t$.

- Sea $(a<b<c)$ triple de Markov. Tomemos $W = \mathbb{P}(a^2, b^2, c^2)$.
Tenemos $0 \to \underset{\langle H \rangle}{\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^2)} \longrightarrow \mathrm{Cl}(W) = \langle \xi \rangle \to \mathbb{Z}/a \oplus \mathbb{Z}/b \oplus \mathbb{Z}/c \to 0$
$H \mapsto abc\,\xi$

Podemos tomar explícitamente $A = (bc\,r_a + abcs)\xi$ donde $s \in \mathbb{Z}$ y $3r_a = a + w_a$.
[Tenemos $a r_b - b r_a = 3ab - c$ $\Rightarrow$ $bc\,r_a \equiv +c^2\ (a)$ y $c^2\xi = \Gamma_3$]

$\therefore$ $\exists$ H.e.c. $E_b, E_c, E_a$ con
$c_1(E_a^\vee) = aA$ $\quad c_1(E_c^\vee) = c(A + \Gamma_1)$ $\quad c_1(E_b^\vee) = b(A + \Gamma_1 + \Gamma_2)$
$\% \cdot H = r_a + as$ $\quad \% \cdot H = r_c + cs$ $\quad \% \cdot H = r_b + bs$

<u>Preguntas</u> : (1) Qué sabemos sobre $W_t \rightsquigarrow W$ cuando $-K_W$ big y $K_W^2 > 0, = 0, < 0$ ? Hay análogo de Markov.
(2) Será que max length $\Rightarrow$ Full en general?