

Colecciones excepcionales de largo máximo en superficies racionales

§1. Conjuntos de Kuznetsov

X var. proy. sobre $\mathbb{C}$, $D^b(X) = D^b(\text{coh } X)$, $(E_1, \dots, E_n) \in D^b(X)$ es una colección excepcional si:

$$\text{Ext}^k(E_i, E_j) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } k=0, i=j, \\ 0 & \text{si } i > j (k \geq 0) \text{ o } i=j, k > 0. \end{cases}$$

Se dice full si $D^b(X) = \langle E_1, \dots, E_n \rangle$.

Rmk: X superficie con $pg = g = 0 \Rightarrow$ todo line bundle es excepcional.

Conjetura: (Kuznetsov '14) Sea $\mathcal{T}$ una categoría triangulada y $\tau = \langle E_1, \dots, E_n \rangle$ colección excepcional full (f.e.c.), entonces toda colección excepcional de largo n es full.

Rmk: Si $\mathcal{T} = \langle E_1, \dots, E_n \rangle$ f.e.c. $\Rightarrow K_0(\mathcal{T}) = \mathbb{Z} \cdot [E_1] \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \cdot [E_n]$

Luego si $\mathcal{T} = \langle E'_1, \dots, E'_n, \underbrace{A}_{\text{comp. de Kuznetsov}} \rangle$ con $(E'_1, \dots, E'_n) \in \mathcal{T}$ colección excepcional

$$\Rightarrow K_0(\mathcal{T}) = \mathbb{Z} \cdot [E'_1] \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \cdot [E'_n] \text{ y } K_0(A) = 0 \Rightarrow A \text{ es fantasma.}$$

Teo: (Elagin-Lunts '16) Para X sup. del Pazzo, toda colección numéricamente excepcional de line bundles de largo máximo, i.e. $E_1, \dots, E_n$ l.b. sobre X t.f.

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \dim \text{Ext}^k(E_i, E_j) =: \chi(E_i, E_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}, \quad n = \text{rank}(K_0(X)),$$

es una f.e.c.

Teo: (Pirozhkov '20) X del Pazzo $\Rightarrow D^b(X)$ no admite fantasmas. En particular vale Conj. Kuznetsov.

Teo: (Borisov-Kombai '25) X sup. sobre proy. con $-K_X \sim E$, E divisor efectivo sobre t.f.

$$\begin{aligned} \text{Pic}(X) &\rightarrow \text{Pic}(E) \\ [D] &\mapsto [D|_E] \end{aligned}$$

es inyectivo. Entonces $D^b(X)$ no admite fantasmas y por ende vale Conj. Kuznetsov.

Ej.: $E \subseteq \mathbb{P}^2$ curva suave, $X = \text{Bl}_{p_1, \dots, p_n} \mathbb{P}^2$ con $p_1, \dots, p_n \in E$ generales t.g. los ciclos

$H^1(E)$, $p_1, \dots, p_n \in \text{Pic}(E)$ son $\mathbb{Z}$ -linealmente independientes.

Entonces $-K_X = -(E^*K_{\mathbb{P}^2} + E_1 + \dots + E_n) = E^*E - E_1 - \dots - E_n \sim \tilde{E} \in X$
↑ transf. cubica de E.

luego se satisfacen las hipótesis del teorema anterior pues

$$\text{Pic}(X) = [E^*H] \cdot \mathbb{Z} \oplus [E_1] \cdot \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus [E_n] \cdot \mathbb{Z} \hookrightarrow \text{Pic}(E) = \text{Pic}(E)$$

$$a_0[E^*H] + a_1[E_1] + \dots + a_n[E_n] \mapsto a_0[HNE] + a_1[p_1] + \dots + a_n[p_n] = 0$$

$$\Leftrightarrow a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$$

Teo. (Kash'23) $X = \text{Bl}_{p_1, \dots, p_{10}} \mathbb{P}^2$ con $p_1, \dots, p_{10} \in \mathbb{P}^2$ generales

$$\Rightarrow \langle \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(D), \dots, \mathcal{O}_X(D_{10}), \mathcal{O}_X(F), \mathcal{O}_X(2F) \rangle \subseteq \mathcal{D}^b(X)$$

esta colección excepcional pero no es full y por lo tanto falta la conj. de Kuznetsov. Donde

$$D_i = i(E_i) = -6H + 2 \sum_{j=1}^{10} E_j - E_i, \quad F = i(H) = -19H + 6 \sum_{j=1}^{10} E_j$$

para $i: \text{Pic}(X) \cong \text{Pic}(X)$ dado por $i|_{K_X} = \text{id}$ y $i|_{K_X^\perp} = -\text{id}$, luego en general para cualquier

divisor $[D] \in \text{Pic}(X)$ si $D \cdot K_X = d$, entonces $(D + d \cdot K_X) \cdot K_X = 0$

$$\Rightarrow i(D) = i((D + d \cdot K_X) - d \cdot K_X) = -D - d \cdot K_X - d \cdot K_X = -D - 2d K_X.$$

Donde $K_X = -3H + \sum_{j=1}^{10} E_j$.

Rmk.: • Orlov'93: muestra que si $Y \subseteq X$ son var. proy. suaves t.g. $\mathcal{D}^b(X)$, $\mathcal{D}^b(Y)$ admiten f.e.c.
 $\Rightarrow \mathcal{D}^b(\text{Bl}_Y X)$ admite f.e.c.

En particular, para $\text{Bl}_{p_1, \dots, p_{10}} \mathbb{P}^2$ una f.e.c. $\Leftarrow \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(E_1), \dots, \mathcal{O}_X(E_{10}), \mathcal{O}_X(H), \mathcal{O}_X(2H)$.

• Kash'22: prueba que $\text{Bl}_{p_1, \dots, p_9} \mathbb{P}^2$ con $p_1, \dots, p_9 \in \mathbb{P}^2$ muy generales, entonces toda colección excepcional de largo máximo es full, i.e. vale Conj. de Kuznetsov.

Conjetura: (Borisov-Kombai'25) Si X esp. suave proy. t.g. $K_X \cdot -K_X$ tiene secciones (o.e. es linealmente equivalente a $E \geq 0$) entonces $\mathcal{D}^b(X)$ no admite fantasmas.

§2. Conjetura SHGH (Segre - Harbourne - Giambruno - Hirschowitz)

$\mathcal{L}(d, m_1, \dots, m_n)$ = sistema lineal de curvas planas de grado d por n puntos generales con multiplicidades $\geq m_i$.

$$= \mathbb{P}H^0(X, \mathcal{O}_X(\underbrace{dH - m_1E_1 - \dots - m_nE_n}_{=: D})) \quad X = \mathbb{P}^2_{p_1, \dots, p_n}.$$

por un lado $h^2(D) = h^0(K_X - D) = h^0(\underbrace{(-d-3)H + (m_1+1)E_1 + \dots + (m_n+1)E_n}_{=: H} - D) = 0$
 $\downarrow \cdot H = -d-3 < 0$

luego, por Riemann-Roch tenemos que

$$h^0(D) - h^1(D) = \chi(X, D) = 1 + \frac{1}{2} D \cdot (D - K_X) = 1 + \frac{1}{2} (d^2 - m_1^2 - \dots - m_n^2 - (-3d + m_1 + \dots + m_n))$$

$$= 1 + \frac{d(d+3)}{2} - \sum_{i=1}^n \binom{m_i+1}{2}.$$

$$\Rightarrow \text{expected dimension } \mathcal{L}(d, m_1, \dots, m_n) = \frac{d(d+3)}{2} - \sum_{i=1}^n \binom{m_i+1}{2}.$$

Def: $\mathcal{L}(d, m_1, \dots, m_n)$ es drce especial si $h^1(D) \neq 0$, i.e. si $\text{expected dim} < \text{dim}$.

Conj. SHGH: $\mathcal{L}(d, m_1, \dots, m_n)$ es especial ssi $\exists C \subseteq X$ (-1) -curva t.q. $D \cdot C \leq -2$.

Rank: (Castelnuovo) SHGH vale para $n \leq 9$.

Teo: (Dumnicki - Jarnicki '07) SHGH vale si $m_i \leq 11 \forall i$.

Teo: (Ciliberto - Miranda '11) SHGH vale si $n=10$, $m_1 = \dots = m_{10} = m$ y $d/m \geq 174/55$.

Def: Un divisor $D = dH - m_1E_1 - \dots - m_nE_n$ en $X = \mathbb{P}^2_{p_1, \dots, p_n}$ se dice que está en forma estándar si $d > 0$, $m_i \geq 0$, $d \geq m_1 \geq \dots \geq m_n$ y $d - m_1 - m_2 - m_3 \geq 0$.

Lema: Si D está en forma estándar y $C \subseteq X$ es (-1) -curva $\Rightarrow D \cdot C \geq 0$.

Dem: Si $C = E_i \Rightarrow D \cdot C = m_i \geq 0$ ✓
 En general $D = \underbrace{e_0 H}_{\geq 0} + \underbrace{e_1 (H - E_1)}_{\sim \geq 0} + \underbrace{e_2 (2H - E_1 - E_2)}_{\sim \geq 0} + \sum_{j=3}^n \underbrace{e_j (3H - E_1 - \dots - E_j)}_{\geq -K_X}$, $e_j \geq 0 \forall j$.

y $-K_X \cdot C = 1$ (fórmula del género). // $\square$

Cor: Si $n=10$ y D está en forma estándar

$$\Rightarrow h^0(D) = 1 + \frac{d(d+3)}{2} - \sum_{i=1}^{10} \binom{m_i+1}{2}$$

si $\bullet m_i \leq 11 \forall i$

$\bullet m_1 = \dots = m_p = m$ y $d/m \geq 174/55$.

§3. Demostración Teorema de Krah

Prop 1: $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(D_1), \dots, \mathcal{O}_X(D_{10}), \mathcal{O}_X(F), \mathcal{O}_X(2F)$ es colección excepcional.

Usando Riemann-Roch podemos chequear primero que la colección es numéricamente excepcional (notar que la isometría $i: P_{\mathbb{C}}(X) \xrightarrow{\sim} P_{\mathbb{C}}(X)$ respeta producto de intersección !!). Luego nos basta verificar

que
$$\text{Ext}^k(E_i, E_j) = 0 \quad \text{para } i > j, k=0, 2.$$

Haciendo los cuentas tenemos que

$$\text{Ext}^0(\mathcal{O}_X(2F), \mathcal{O}_X) = H^0(-F), \quad \text{Ext}^2(\mathcal{O}_X(2F), \mathcal{O}_X(F)) = H^2(-F) = H^0(K_X + F)^\vee$$

$$\text{Ext}^0(\mathcal{O}_X(2F), \mathcal{O}_X(D_i)) = H^0(D_i - 2F), \quad \text{Ext}^2(\mathcal{O}_X(2F), \mathcal{O}_X(D_i)) = H^2(D_i - 2F) = H^0(K_X - D_i + 2F)^\vee$$

$$\text{Ext}^0(\mathcal{O}_X(2F), \mathcal{O}_X) = H^0(-2F), \quad \text{Ext}^2(\mathcal{O}_X(2F), \mathcal{O}_X) = H^2(-2F) = H^0(K_X + 2F)^\vee$$

$$\text{Ext}^0(\mathcal{O}_X(F), \mathcal{O}_X(D_i)) = H^0(D_i - F), \quad \text{Ext}^2(\mathcal{O}_X(F), \mathcal{O}_X(D_i)) = H^2(D_i - F) = H^0(K_X - D_i + F)^\vee$$

$$\text{Ext}^0(\mathcal{O}_X(F), \mathcal{O}_X) = H^0(-F), \quad \text{Ext}^2(\mathcal{O}_X(F), \mathcal{O}_X) = H^2(-F) = H^0(K_X + F)^\vee$$

$$\text{Ext}^0(\mathcal{O}_X(D_i), \mathcal{O}_X(D_j)) = H^0(D_j - D_i), \quad \text{Ext}^2(\mathcal{O}_X(D_i), \mathcal{O}_X(D_j)) = H^2(D_j - D_i) = H^0(K_X - D_j + D_i)^\vee$$

$$\text{Ext}^0(\mathcal{O}_X(D_i), \mathcal{O}_X) = H^0(-D_i), \quad \text{Ext}^2(\mathcal{O}_X(D_i), \mathcal{O}_X) = H^2(-D_i) = H^0(K_X + D_i)^\vee$$

a d d m s o r $-H < 0$ entonces no tiene secciones, o si es de la forma $D_j - D_i = E_i - E_j$.

Las otras restantes son

$$-F = 19H - 6 \sum_{j=1}^{10} E_j, \quad -2F = 38H - 12 \sum_{j=1}^{10} E_j, \quad -D_i = 6H - 2 \sum_{j=1}^{10} E_j + E_i,$$

$$D_i - F = 13H - 4 \sum_{j=1}^{10} E_j - E_i \quad \text{y} \quad D_i - 2F = 32H - 10 \sum_{j=1}^{10} E_j - E_i$$

que están en forma estándar y cumplen $m_i \leq 11 \forall i$ o $m_1 = \dots = m_p = 12$ con $d/m = 38/12 \geq 174/55$ luego podemos usar lo conij. $846H$ y que $C \cdot D \geq 0 \forall C(-1)$ -curr y calcular $h^0(D) = 0$ en todos los casos !!!

Paso 2: $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(D_1), \dots, \mathcal{O}_X(D_{10}), \mathcal{O}_X(F), \mathcal{O}_X(2F)$ no es full.

Def: Pseudo-altura aritmética

$$\text{ph}_{\text{ac}}(E_1, \dots, E_n) := \min_{1 \leq a_0 < \dots < a_p \leq n} \left(\sum_{i=0}^p e(E_{a_i}, E_{a_{i+1}}) + e(E_{a_p}, E_{a_0} \otimes \omega_X^{-1}) - p \right)$$

donde $e(F, F') := \inf \{k \in \mathbb{Z} : \text{Ext}^k(F, F') \neq 0\}$ ($\in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$ en nuestro caso).

Teo: (Kuznetsov '15) $E_1, \dots, E_n$ colección excepcional tal que $\text{ph}_{\text{ac}}(E_1, \dots, E_n) > -\dim X$
 $\Rightarrow E_1, \dots, E_n$ no es full.

Af: $\text{ph}_{\text{ac}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(D_1), \dots, \mathcal{O}_X(D_{10}), \mathcal{O}_X(F), \mathcal{O}_X(2F)) \geq 0$.

En efecto, para $p=0$ cada $e(\%, \%) \geq 0$ ✓.

Para $p>0$ basta verificar que $e(E_{a_i}, E_{a_{i+1}}) \geq 1 \quad \forall a_i < a_{i+1}$ ya que en tal caso

$$\sum_{i=0}^p e(E_{a_i}, E_{a_{i+1}}) + e(E_{a_p}, E_{a_0} \otimes \omega_X^{-1}) - p \geq e(E_{a_p}, E_{a_0} \otimes \omega_X^{-1}) \geq 0 \quad \checkmark$$

para esto basta verificar que $\text{Ext}^0(E_{a_i}, E_{a_{i+1}}) = 0 \quad \forall a_i < a_{i+1}$, i.e. que

$$H^0(D_i) = H^0(F) = H^0(2F) = H^0(D_j - D_i) = H^0(F - D_i) = H^0(2F - D_i) = H^0(F) = 0$$

lo que se cumple pues todos cumplen que $-H < 0$ o son de la forma $D_j - D_i = E_i - E_j$. // $\square$